ELEMENTA
MATHEMATICA

IN QUATUOR TOMOS DIGESTA.

TOMUS SECUNDUS

In quo linearum atque planorum ſymptomata demonſtrantur.

.32

INDEX LIBRORUM

Qui in hoc secundo Tomo continentur.



ELEMENTORUM MATHEMATICORUM

LIBER III.

De angulis, qui fiunt a recta linea alteri rectæ insistente, eamque secante.

Affectiones quantitatis continuæ permanentis demonstraturi, a *linea*, utpote quæ primam illius speciem constituit, initium sumimus: qua quidem in re symptomata illa priori loco expendemus, quæ a recta linea alteri rectæ insistente, eamque secante dependent.

DEFINITIO I.

1 *Punctum est, cujus pars nulla*, seu quod a nobis ita spectatur, perinde ac si reipsa nullam omnino partem, nullamque extensionem haberet. Præscindit namque Geometra, an reapse existat, vel existere queat indivisibile quantitatis, sibique satis est, ut dimensiones in eo, quod est extensum, negligere possit, illud scilicet considerando ac si nulla omnino extensione præditum esset.

COROLLARIUM.

2. *Unum punctum non est majus alio*. Non enim potest unum a nobis concipi veluti majus alio, nisi partes in eo distinguantur, quarum una illud aliud adæquet (*Syn. Alg.* §. 254.).

DEFINITIO II.

3. *Linea est longitudo latitudinis, & profunditatis plane expers*. Magnitu-

do nimirum, in qua, ceteris dimensionibus præcisis, seu omnino neglectis, sola longitudo consideratur. Rem praxis ipsa luculenter ostendit, eum scilicet turris altitudinem, latitudinem fluminis, itinerisve longitudinem inquirimus, & determinamus, quin ceterarum dimensionum, quæ in hisce corporibus reperiuntur, ratio aliqua habeatur. Hinc nonnulli *lineam* concipiunt veluti magnitudinem ex fluxu puncti productam, ipsamque *puncti fluxum* appellant. Dividitur porro linea in *rectam*, *curvam*, & *mixtam*; & si finita fuerit, illius extrema sunt puncta.

DEFINITIO III.

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Tab. I. 4. *Linea recta dicitur illa, quæ suis ex æquo interiicitur punctis*, cujusmodi est linea AB. E contrario vero illa *curva vocatur*, *quæ inter sua extrema extollitur*, *vel deprimitur*, ut linea CD. Illa demum *mixta censetur*, *quæ una sui parte recta est*, *altera curva*, qualem exhibet linea EF.

SCHOLION.

Fig. 1. Tab. I. 5. Lineam *rectam* pulchre definit Plato, dum ait, *rectam lineam esse*, *cujus media obumbrant extrema*. Si namque linea AB est recta, oculus G positus in altero illius extremo A nullam illius partem discernet, sed tota ipsa linea quasi punctum sibi videbitur, quatenus nempe ob lineæ rectitudinem, extremum punctum A impedit, quominus partes inter extrema positæ in oculum agant, suique imaginem in oculi fundo efficiant.

DEFINITIO IV.

Fig. 4. Tab. I. 6. *Angulus planus est duarum linearum in uno puncto concurrentium mutua quædam inclinatio.* Sic inclinatio mutua duarum linearum AB, CB, ex eodem puncto B erumpentium, *angulus* dicitur, cujus *apex* vocatur punctum B, in quo lineæ ipsæ concurrunt, *crura* vero lineæ AB, CB.

Monitum.

7. Angulus quicunque tribus alphabeti literis indicari solet, ea quidem lege, ut earum media *anguli apicem* designet.

COROLLARIUM I.

8. Ex eo, quod tota *anguli* natura in mutua duarum linearum inclinatione consistat, manifeste sequitur, *magnitudinem anguli non ex linearum ipsum constituentium longitudine*, *sed ex illarum dumtaxat distractione a se mutuo*, *æstimandam esse*, adeo nimirum ut eadem semper sit magnitudo anguli, sive ipsius crura producantur, sive minuantur. Hinc

Co-

COROLLARIUM II.

9. *Duæ lineæ, quo magis a se mutuo distractæ sunt, eo majorem angulum constituunt; eo minorem vero, quo minus sunt distractæ*; ut proinde *ex duobus angulis ille sit major altero, cujus crura sunt magis distracta*; & vicissim *angulus major, crura magis distracta habeat*. Sic angulus ABC major est angulo DBE, quamvis duæ lineæ AB, CB minores sint duabus DB, BE; quia nimirum magis a se mutuo distractæ sunt duæ AB, CB, quam duæ DB, BE. Vicissim quoque ex eo, quod angulus ABC major sit angulo DBE, magis a se mutuo distractæ erunt duæ AB, quam duæ DB, BE. Fig. 5. Tab. I.

COROLLARIUM III.

10. *Anguli æquales habent crura æque distracta; & vicissim anguli, qui habent crura æque distracta, sunt æquales.*

SCHOLION.

11. Considerando angulum penes lineas ipsum constituentes dividitur in *rectilineum*, *curvilineum*, & *mixtum*. Angulus vero *rectilineus*, attenta linearum distractione, in *rectum*, *acutum*, & *obtusum*.

DEFINITIO V.

12. *Angulus rectilineus dicitur ille, qui a duobus rectis lineis efficitur*. Hujusmodi est angulus ABC; cum rectæ sint lineæ AB, BC, quæ ipsum constituunt. Fig. 6. Tab. I.

DEFINITIO VI.

13. *Mensura anguli rectilinei est arcus circuli, arbitrario intervallo ex illius apice descripti, inter ipsius anguli crura comprehensus*. Ut si ex apice B anguli rectilinei ABC, arbitrario intervallo B*d*, describatur circulus F*de*, arcus *de* ipsius circuli inter crura BA, BC comprehensus, est mensura ipsius anguli ABC. Determinat namque distractionem a se mutuo linearum AB, CB, quantaque ipsa sit, definit. Hinc Fig. 6. Tab. I.

COROLLARIUM.

14. *Anguli rectilinei sunt directe inter se, ut arcus circulorum, ex eorum apicibus eodem intervallo descriptorum, quos ipsorum angulorum crura comprehendunt*; & vicissim *arcus hujusmodi sunt directe inter se, ut ipsi anguli*. Nimirum angulus ABC est ad angulum DEF, ut arcus *ab* ad arcum *cd*, qui eodem intervallo ex illorum apicibus B, E descripti, inter ipsorum angulorum crura continentur; & vicissim arcus *ab* est ad arcum *cd*, ut est angulus ABC ad angulum DEF. Fig. 6. Fig. 7. Tab. I.

SCHOLION.

15. Non aliam circuli notionem hic, & in sequentibus supponimus, nisi quam etiam rudis quisque habet, quæque propterea nobis congenita jure ac meritò censeri potest.

DEFINITIO VII.

Fig. 9 Tab. I. 16. *Angulus curvilineus vocatur ille, quem curvæ lineæ efficiunt*, cujusmodi est angulus GHK.

DEFINITIO VIII.

Fig. 10. Tab. I. 17. *Angulus mixtilineus est ille, cujus alterum crus est linea recta, alterum curva*, ut angulus LMN.

DEFINITIO IX.

Fig. 11. Tab. I. 18. *Angulus rectus vocatur ille, qui, alterutra rectarum ipsum constituentium per ipsius anguli apicem in directum producta, angulum habet ex altera parte sibi æqualem*. Sic angulus ABC *rectus* est; quia, recta AB directe producta in D, angulus inde factus DBC est ipsi ABC æqualis.

COROLLARIUM.

Fig. 11. Tab. I. 19. *Si alterum crus anguli recti in directum per ipsius anguli apicem producatur, alter angulus rectus efficitur*. Rectus nimirum erit angulus CBD, si rectus fuerit angulus ABC. Quandoquidem angulus ille rectus est, qui rectum angulum adæquat.

DEFINITIO X.

Fig. 12. Tab. I. 20. *Angulus acutus est ille, qui minor est recto*. Talis est angulus ABC. Is enim deficit ab angulo recto DBC.

DEFINITIO XI.

Fig. 13. Tab. I. 21. *Ille angulus obtusus vocatur, qui rectum superat*. Hujusmodi est angulus ABC; cum sit major recto DBC.

DEFINITIO XII.

Fig. 11. Tab. I. 22. *Illa recta linea dicitur alteri rectæ perpendicularis, quæ ita illi insistit, ut duos hinc inde angulos inter se æquales efficiat*. Sic recta linea CB perpendicularis erit rectæ AD, si æquales fuerint anguli CBA, CBD.

Co-

COROLLARIUM I.

23. *Recta linea ad perpendiculum alteri rectæ insistens duos hinc inde rectos angulos efficit*. Ut si recta CB perpendicularis fuerit rectæ AD, duo anguli ABC, CBD, erunt recti. Cum enim anguli ABC, CBD sint hoc ipso æquales inter se (§. 22.), uterque erit rectus (§. 19.). Fig. 11. Tab. I.

COROLLARIUM II.

24. *Si una recta linea ita alteri rectæ insistat, ut duos cum illa efficiat hinc inde angulos rectos, erit illi perpendicularis*. Recta nimirum CB perpendicularis erit rectæ AD, si recti fuerint duo anguli ABC, CBD. Si namque angulus ABC est rectus, angulus CBD erit illi æqualis (§. 18.); ac proinde recta CB ita incumbit rectæ AD, ut duos angulos inter se æquales cum ipsa AD producat. Fig. 11. Tab. I.

DEFINITIO XIII.

25. Anguli, qui hinc inde fiunt a recta linea alteri insistente, dicuntur *deinceps positi*. Tales sunt duo anguli CBA, CBD producti a recta CB insistente rectæ AD. Fig. 11. Tab. I.

DEFINITIO XIV.

26. Si una recta linea AB alteram secet CD, ita ut quatuor fiant anguli AEC, CEB, BED, AED in communi sectionis puncto E, duo anguli AEC, BED, quemadmodum etiam duo CEB, AED, *ad verticem oppositi* nuncupantur. Fig. 14. Tab. I.

DEFINITIO XV.

27. *Duæ lineæ dicuntur habere segmentum commune, cum una pars utrique communis est, cetera vero diversa, adeo ut angulum in communi puncto constituant*. Sic duæ lineæ ABC, ABD habent commune segmentum AB; quia pars AB est utrique communis, quoad alias vero partes divergentes a se mutuo fiunt, angulumque producunt CBD. Fig. 15. Tab. I.

DEFINITIO XVI.

28. *Duæ rectæ lineæ in directum jacere dicuntur, cum in communi unionis puncto nullum plane angulum efficiunt, sed unam eandemque rectam constituunt*. Sic in directum jacent duæ rectæ AB, BC, quia ea ratione simul unitæ sunt in puncto B, ut nullus, in eo angulus ab illis fiat, sed unam efficiant rectam AC. Fig. 16. Tab. I.

POSTULATUM I.

A dato puncto ad datum quodvis punctum rectam lineam ducere.

29. Datis nimirum duobus punctis a se mutuo distantibus, petitur, ut concedatur, rectam lineam ab eorum uno ad alterum duci posse. Res manifesta est. Nihil enim impedit, quominus unum punctum per interjectum spatium directe moveatur, ut alteri tandem congruat.

SCHOLION.

30. Ducitur recta linea a dato puncto ad datum punctum ope *Regulæ* ligneæ, vel metallicæ, eam datis punctis ita applicando, ut ejus acies, secus quam postea, ope acus, linea designatur, illis perfecte congruat. Hinc vides, rectitudinem lineæ ducendæ a rectitudine aciei *Regulæ* unice dependere. Quamobrem curandum quammaxime est, ut acies *Regulæ* exactior sit, quoad fieri possit. Dupliciter itaque explorari potest, an exacta sit *Regula*.

Examen I. Regulæ.

31. Collocetur dexter oculus, altero clauso, ad extremum aciei ipsius *Regulæ*, juxta quam rectam lineam ducere volumus. Si radius visualis nihil penitus offendat extantis, nihil videat declinantis, idonea erit *Regula*; secus vero si horum unum vel alterum experiri contigerit. Ratio hujus est; quia radius visualis, sive lumen, secundum rectam lineam exactissime propagatur.

Examen II. Regulæ.

32. Ducta linea secus aciem *Regulæ* examinandam, latus ipsum invertatur, ita nimirum ut extremum *Regulæ*, quod erat ad dexteram, ponatur ad sinistram, tum eadem acies descriptæ lineæ applicetur, ut ejus extremis punctis perfecte congruat. Si acies sic permutatim applicata, nullibi spatium cum linea antea descripta incluserit, exacta erit *Regula*; vitiosa vero, si spatium alicubi cum illa comprehenderit. Duæ enim rectæ lineæ, ut dicemus, nequeunt spatium concludere.

POSTULATUM II.

Data rectam lineam finitam in directum producere.

33. Petitur nimirum, ut data quævis recta linea finita in directum protrahi possit, adeo ut major fiat. Nihil enim implicantiæ in eo est, ut extremum ipsius lineæ punctum motu directo, ut antea, suum fluxum prosequatur.

SCHO-

SCHOLION.

34. Recta linea terminata in directum mechanice producitur ope *Regulæ*, eam scilicet ita lineæ ampliandæ applicando, ut ejus acies, secus quam postea data linea, mediante acu, producitur, illi perfecte congruat. *Videatur Clavius lem. XI. lib. 1. de Astrolabio.*

POSTULATUM III.

Datis puncto, & intervallo arcum circuli, totumque circulum describere.

35. Datis nimirum puncto, lubito intervallo, petitur, ut concedatur, arcum circuli lubitæ magnitudinis, ipsumque integrum circulum describi posse. Profecto nihil prohibet, quominus punctum quodcunque curvo itinere fluere queat.

SCHOLION.

36. Describitur arcus circuli, totusque circulus ope eximii cujusdam instrumenti, quod latine *circinus*, italice *il compasso* vocatur, dum scilicet altero illius pede in dato puncto quiescente, alter super planum circumducitur, donec ad illud redeat punctum, a quo primum moveri cœpit. Ejus siquidem extremum, quod punctum est, curvo hujusmodi itinere arcum circuli, totumque circulum in ipso plano describit. Affirmant porro plerique, *circinum* esse inventum Icari, cui Dædalus Pater laudem invidens tam mirifici instrumenti, necem machinatus fuerit.

Lemma fundamentale.

Omnes anguli recti sunt inter se æquales.

37. Quamquam hæc propositio inter *axiomata* ab Euclide, aliisque celeberrimis Geometris censeatur; quia tamen maximi in Geometria momenti est, lubet eam breviter ostendere. Sint itaque duo anguli recti ABC, *abc*. Dico, eos esse inter se æquales.

Demonstratio.

Si namque fieri potest, sit angulus rectus *abc* major angulo recto ABC; ductaque proinde ex apice B recta BE, fiat angulus ABE angulo *abc* æqualis. Producta ergo in directum recta AB in D (§. 33.), cum ex hypothesi angulus ABC sit rectus, erit angulus deinceps positus CBD ipsi ABC æqualis (§. 18.). Eandem quoque ob causam angulus EBD æqualis erit angulo ABE; cum etiam ipse ABE, utpote æqualis angulo *abc*, positus sit rectus. Fig. 17. Fig. 18. Tab. I.

rectus. Est autem angulus ABE major angulo ABC (*Syn. Alg.* §. 257.). Ergo eodem angulo ABC major itidem erit angulus EBD (*Ibidem* §. 264.); cumque duo anguli ABC, CBD sint æquales inter se, angulus EBD major similiter erit angulo CBD (*Ibidem*); atque adeo pars superabit totum, quo nihil absurdius (*Ibidem* §. 257.). Angulus itaque *abc* major non est angulo ABC. Eodem modo ostendam, non esse ipso ABC minorem. Ergo duo anguli recti ABC, *abc* sunt inter se æquales; omnesque propterea anguli recti sese mutuo adæquant, quod erat ostendendum.

Corollarium.

Omnes anguli recti æquales arcus ex eorum apicibus æquali intervallo descriptos subtendunt.

38. Cum enim arcus hujusmodi sint directe inter se, ut ipsi anguli, quibus subtenduntur (§. 14.), si omnes anguli recti sunt inter se æquales æquales quoque erunt arcus, quos ex eorum apicibus æquali intervallo descriptos subtendunt.

Scholion.

39. Recte itaque Proclus vocat angulum rectum *finitum semper, atque determinatum, eundemque manentem, neque accretionem, neque decretionem suscipientem*. Penes ipsum quoque ceteros *angulos rectilineos* definiri; *cum ipsi per se indefiniti, indeterminatique sint*, ut patet.

Theorema I.

Recta super rectam consistens duos efficit angulos vel rectos, vel duobus rectis æquales.

40. Rectæ lineæ AD altera quædam recta CB insistat, duos cum illa efficiens angulos CBA, CBD. Dico, hujusmodi angulos, vel rectos esse, vel summam æquare duorum rectorum, si ambo simul sumantur.

Demonstratio.

Recta namque CB vel ad perpendiculum incumbit rectæ AD, vel oblique. Si primum: ergo rectus est uterque angulus ABC, CBD (§. 23.).
Fig. 17. Tab. I. Si vero oblique incumbit, quemadmodum reipsa linea BE insistit rectæ AD, educatur ex puncto B recta BC (§. 29.), quæ ipsi AD sit perpendicularis. Igitur duo anguli ABC, CBD erunt recti (§. 23.). Tres autem anguli ABC, CBE, EBD æquales sunt duobus ABC, CBD (*Syn. Alg.* §. 256.). Ergo tres ABC, CBE, EBD æquales sunt duobus rectis. Est autem angulus ABE æqualis duobus ABC, CBE (*Ibid.* §. 256.). Ergo addito communi EBD, erunt

erunt duo ABE, EBD æquales tribus ABC, CBE, EBD (*Ibid. §. 265.*); cumque, ut jam ostensum est, tres ABC, CBE, EBD valeant duos rectos, duo quoque ABE, EBD duobus rectis æquales erunt (*Ibid. §. 262.*). Igitur recta super rectam, &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Cognita quantitate unius duorum angulorum, qui deinceps positi sunt, alterius quoque magnitudo innotescet.

41. Cum enim ambo simul sumti valeant duos rectos, unius quantitate cognita, quod relinquitur ad duos rectos, erit alterius magnitudo, quæ ignoratur.

COROLLARIUM II.

Si plures rectæ lineæ in eodem plano eidem rectæ ad idem punctum insistunt, omnes anguli, qui ab illis fiunt, sunt æquales duobus rectis.

42. Sunt enim duo recti in plures æqualiter, vel inæqualiter, ut patet, divisi.

COROLLARIUM III.

Duæ rectæ lineæ sese mutuo in puncto secantes quatuor angulos vel rectos, vel quatuor rectis æquales constituunt.

43. Nimirum quatuor anguli AEC, CEB, BED, AED, qui a duabus rectis sese mutuo secantibus in puncto E producuntur, vel sunt recti, vel omnes simul summam adæquant quatuor rectorum. Etenim tam duo AEC, CEB, quam duo AED, DEB vel recti sunt, vel summam duorum rectorum conficiunt. Fig. 14. Tab. I.

COROLLARIUM IV.

Omnes anguli, qui in eodem plano circa idem punctum consistunt, si simul accipiantur, æquales sunt quatuor rectis.

44. Sunt enim quatuor recti anguli in illos plures æqualiter, vel inæqualiter divisi.

COROLLARIUM V.

Integer circulus ex aliquo puncto descriptus, est mensura quatuor angulorum rectorum, quorum omnium apices in illo puncto consistunt.

45. Circulus nimirum AEDC metitur quatuor rectos angulos ABC, CBD, DBE, EAB, consistentes circa punctum *B*, ex quo circulus ipse descriptus est. Etenim circa idem punctum *B*, & in eodem plano nonnisi quatuor anguli recti haberi possunt (§. 41.).

Fig. 19. Tab. I.

COROLLARIUM VI.

Mensura anguli recti est quadrans circuli ex illius apice descripti. Mensura anguli obtusi est arcus major quadrante; & anguli acuti est arcus quadrante circuli minor.

46. Arcus nimirum A*B*E, qui metitur angulum rectum A*B*E, erit quadrans circuli AEDC. Cum enim circa punctum *B* nonnisi quatuor anguli recti haberi possint (§. 44.), eosque simul metiatur integer circulus AEDC (§. 45.); omnesque anguli recti sint inter se æquales (§. 37.), æquales erunt arcus, quos singuli subtendunt (§. 14.). Æquales ergo erunt arcus AE, ED, DC, CA, si fuerint recti quatuor anguli A*B*E, E*B*D, D*B*C, C*B*A; ac proinde eorum quilibet erit quadrans circuli. Quoniam vero angulus obtusus A*B*G est major recto A*B*E (§. 21.), & angulus acutus EBG est recto minor (§. 20.), illius mensura erit arcus AEG major quadrante AE; hujus vero mensura erit arcus EG minor quadrante EGD. Arcus enim hujusmodi sunt directe inter se, ut ipsi anguli (§. 14.).

Fig. 19. Tab. I.

SCHOLION.

47 Cum quilibet circulus dividatur communiter in 360. partes æquales, quæ *gradus* dicuntur, & quilibet *gradus* in 60. partes itidem æquales quæ vocentur *minuta*, & sic deinceps, remanet, mensuram anguli recti esse arcum circuli 90. *graduum*; mensuram anguli obtusi esse arcum, cujus magnitudo 90. *gradus* superat; mensuram vero anguli acuti esse arcum, qui minus, quam 90. *gradus*, comprehendit. Universaliter autem tot *graduum*, & *minutorum* esse datum quemcumque angulum, quot *gradus*, & *minuta* in arcu ab illo subtenso continentur.

COROLLARIUM VII.

Duæ rectæ lineæ nequeunt habere segmentum commune.

48. Si namque fieri potest, rectæ sint duæ lineæ A*B*C, A*B*D commune segmen-

segmentum habentes AB. Ex communi ergo puncto B erigatur recta BE (§. 29.). Igitur per hoc *theorema* duo anguli ABE, EBC æquales erunt duobus rectis, quemadmodum etiam duo ABE, EBD; cum utraque ABC, ABD posita sit recta; ac proinde duo ABE, EBC æquales erunt duobus ABE, EBD (*Syn. Alg.* §. 259.). Sublato propterea communi angulo ABE, erit reliquus EBC reliquo EBD æqualis, pars toti (*Ibid.* §. 266.). Id autem repugnat (*Ibid.* §. 257.). Ergo duæ lineæ ABC, ABD commune habentes segmentum AB, non sunt rectæ; adeoque &c. Fig. 20 Tab. I.

THEOREMA II.

Si ad datam rectam lineam ad datum in ea punctum duæ rectæ lineæ ex oppositis partibus ductæ, duos angulos vel rectos, vel duobus rectis æquales fecerint, in directum erunt illæ duæ rectæ lineæ.

49. Ad datam rectam lineam EB, ad datum in ea punctum B, ducantur ex oppositis partibus A, C duæ rectæ lineæ AB, CB, quæ cum ipsa EB duos efficiant angulos ABE, EBC vel rectos, vel duobus rectis æquales. Dico, lineas AB, CB esse in directum positas, seu unam eandemque rectam constituere ABC.

Demonstratio.

Si namque, stante hac hypothesi, duæ lineæ AB, CB non sunt in directum earum altera AB, eaque cadat in D (§. 33.). Igitur cum linea ABD sit recta, duo anguli ABE, EBD æquales erunt duobus rectis (§. 40.). Sunt autem per hypothesim æquales duobus rectis etiam duo ABE, EBC. Ergo duo ABE, EBD erunt duobus ABE, EBC æquales (*Syn. Alg.* §. 259.). Sublato propterea communi ABE, erit reliquus EBD æqualis reliquo EBC (*ibid.* §. 266.). Hoc autem repugnat (*ibid.* §. 257.). Ergo recta AB in directum producta nequit cadere extra rectam BC; eruntque proinde duæ AB, BC in directum positæ. Itaque si ad datam rectam lineam &c. quod erat ostendendum. Fig. 21. Tab. I.

THEOREMA III.

Ad datam rectam lineam e puncto in illa accepto una tantum recta perpendicularis ad eandem partem excitari potest.

50. Esto recta AD, in qua sumatur punctum B. Ex ipso autem erigatur recta perpendicularis BC. Dico, ex eodem puncto B excitari non posse aliam rectam ad eandem partem C, quæ sit ipsi AD perpendicularis, atque cum perpendiculari BC in eodem plano consistat.

Demonstratio.

Si namque fieri potest, esto altera perpendicularis BE. Igitur cum utraque CB, EB sit rectæ AD perpendicularis, uterque angulus CBD, EBD erit rectus (§. 23.). Omnes autem anguli recti sunt inter se æquales (§. 37.). Ergo angulus EBD æqualis erit angulo CBD. Est autem angulus EBD pars anguli CBD, ut patet. Ergo pars æquabit totum: quod cum repugnet (*Syn. Alg.* §. 257.), nequeunt duæ rectæ CB, EB simul ad perpendiculum incumbere eidem rectæ AD. Itaque ad datam rectam lineam &c. quod erat ostendendum.

Fig. 17. Tab. I.

THEOREMA IV.

Anguli ad verticem oppositi, qui a duabus rectis lineis sese mutuo secantibus producuntur, sunt inter se æquales.

51. Duæ rectæ lineæ AB, CD se mutuo secent in puncto E. Dico, angulos CEB, AED, sicuti etiam CEA, BED, qui sunt ad verticem oppositi, esse inter se æquales.

Demonstratio.

Duo anguli AEC, CEB valent duos rectos, quemadmodum etiam duo AEC, AED (§. 40.); cum utraque AB, CD posita sit recta. Igitur duo AEC, CEB æquales sunt duobus AEC, AED (*Syn. Alg.* §. 259.). Ablato propterea communi AEC, erit reliquus CEB reliquo AED æqualis (*Ibid.* §. 266.). Eodem modo ostendam, duos quoque CEA, BED æquales esse inter se. Itaque anguli ad verticem oppositi &c. quod erat ostendendum.

Fig. 14. Tab. I.

COROLLARIUM I.

Si unus quatuor angulorum, qui a duabus rectis sese mutuo secantibus producuntur, fuerit rectus, ceteri quoque omnes erunt recti.

52. Ut si angulus ABE productus a rectis AC, EF sese mutuo secantibus, fuerit rectus, recti quoque erunt reliqui EBC, CBF, ABF. Si namque rectus est angulus ABE, rectus quoque erit alter ad verticem oppositus FBC. Duo autem ABE, EBC valent duos rectos, quemadmodum etiam duo ABF, FBC (§. 40.). Ergo si duo ABE, FBC fuerint recti, recti similiter erunt duo EBC, ABF. Rectus enim est angulus, qui duorum angulorum rectorum est medietas.

Fig. 12. Tab. I.

COROLLARIUM II.

Si recta perpendiculariter alteri rectæ insistens infra illam producatur, segmentum quoque inferius eidem rectæ ad perpendiculum incumbet.

53. Si nimirum recta EB perpendicularis fuerit rectæ AC, directe producta

ducta recta EB in F, segmentum quoque BF erit eidem AC perpendiculare. Si namque recta EB rectæ AC perpendicularis fuerit, rectus erit uterque angulus ABE, EBC (§. 23.). Ergo recti quoque erunt duo ABF, FBC, utpote illis ad verticem oppositi. Igitur recta similiter BF erit ipsi perpendicularis (§. 24.). Fig. 21. Tab. I.

THEOREMA V.

Si quatuor rectæ lineæ ex eodem puncto exeuntes, & in eodem plano existentes, angulos ad verticem oppositos æquales fecerint, erunt duæ ex adverso in directum positæ.

54. Ex eodem puncto E in eodem plano quatuor egrediantur rectæ EB, EB, EA, ED constituentes in ipso plano quatuor angulos AEC, CEB, BED, AED, quorum duo ad verticem oppositi CEB, AED, sicuti etiam duo AEC, DEB, sint æquales. Dico, rectas AE, EB esse in directum positas, quemadmodum etiam rectas EB, ED.

Demonstratio.

Cum enim duo anguli CEB, AED æquales sint inter se, sicuti etiam duo AEC, DEB, erunt duo CEB, BED simul sumti æquales duobus AED, AEC simul pariter acceptis (*Syn. Alg.* §. 265.). Quatuor autem anguli CEB, BED, DEA, AEC æquales sunt quatuor rectis (§. 43.). Ergo tam duo CEB, BED, quam duo DEA, AEC duobus rectis æquales erunt. Duæ igitur rectæ CE, ED, quemadmodum etiam duæ AE, EB, erunt in directum positæ (§. 49.). Quamobrem si quatuor rectæ lineæ &c. quod erat ostendendum. Fig. 14. Tab. I.

COROLLARIUM.

Si in data recta linea punctum sumatur, ex quo duæ rectæ hinc inde educantur, quæ angulos ad verticem oppositos æquales constituant, illæ duæ rectæ lineæ erunt in directum positæ.

55. Ut si ex puncto E sumto in recta CD duæ hinc inde educantur rectæ EB, EA, quæ angulos ad verticem oppositos CEB, AED, vel duos BED, AEC æquales constituant, erunt duæ EB, EA in directum positæ. Cum enim duo CEB, BED æquales sint duobus rectis, quemadmodum etiam duo CEA, AED (§. 49.), erunt duo CEB, BED æquales duobus CEA, AED (*Syn. Alg.* §. 259.). Igitur sublatis æqualibus CEB, AED, erit reliquus AEC reliquo BED æqualis (*Ibid.* §. 266.); ac proindæ duæ AE, EB erunt per hoc *theorema* in directum positæ. Fig. 14. Tab. I.

ELE-

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM

LIBER IV.

De rectis lineis parallelis.

HActenus lineas rectas consideravimus, quatenus una cum alia simul in puncto concurrit, nunc eædem lineæ considerandæ sunt, quatenus ita se habent, ut simul in puncto concurrere minime queant.

DEFINITIO I.

Fig. 22. Tab. I. 1. *Lineæ rectæ parallelæ vocantur illæ, quæ ubique æqualiter inter se distant*. Tales sunt rectæ AB, CD. Quippe ita se habent, ut eadem semper sit distantia earum a se mutuo, ubicumque ea sumatur.

COROLLARIUM I.

Fig. 22 Tab. I. 2. *Perpendiculares omnes inter duas rectas parallelas comprehensæ*, ut rectæ *ab*, *cd*, *ef*, *gh*, *sunt inter se æquales*. Ab his enim sumitur distantia ipsarum rectarum parallelarum AB, CD, ut clarius ex dicendis patebit.

COROLLARIUM II.

3. *Duæ rectæ lineæ inter se parallelæ nequeunt simul in puncto concurrere, quamvis directe in infinitum producantur*. Hujusmodi siquidem concursus haberi nequit, nisi earum distantia a se mutuo continuo minuatur, ac proinde quin tollatur earum parallelismus.

DEFINITIO II.

Fig. 24. Tab. I. 4. Contra vero *illæ duæ rectæ lineæ parallelæ non sunt, quarum distantia a se mutuo eadem ubique non est, sed ex una parte continuo decrescit*. Hujusmodi sunt duæ rectæ AB, CD. Manifeste namque constat, eandem non esse ubique ipsarum a se mutuo distantiam, sed ad partes B, D eam continuo minui.

COROLLARIUM.

5. *Rectæ lineæ non parallelæ, si utrinque in directum producantur, ex una* par-

parte ad se mutuo continuo accedunt, seu proximiores fiunt; ex altera vero a se mutuo magis continuo recedunt, magisque divergentes a se mutuo redduntur.

DEFINITIO III.

6. Recta EF incidens in duas rectas parallelas AB, CD plures efficit angulos, qui diverso nomine designantur. Duo enim BGH, GHD, quemadmodum etiam duo AGH, GHC dicuntur *interni ad easdem partes*. Duo GHD, AGH, sicuti & duo BGH, GHC, vocantur *alterni*. Duo EGB, DHF, aliique eodem modo se habentes, dicuntur *externi ad easdem partes*. Angulus EGB dicitur *externus*; angulus vero GHD *internus ad easdem partes*. Fig. 24. Tab. I.

Axioma fundamentale.

Duæ rectæ lineæ nequeunt spatium concludere.

7. Si namque rectæ sunt, vel in nullo puncto concurrunt; vel si concurrunt in puncto ex una parte, ex altera continuo a se mutuo recedunt.

THEOREMA I.

Si in duas rectas lineas recta quædam incidens angulos internos ad eandem partem duobus rectis minores fecerit, parallelæ non erunt illæ duæ rectæ lineæ.

8. Recta EF incidente in duas rectas AB, CD, duo anguli interni ad easdem partes BGH, GHD minores sint duobus rectis. Dico, lineas AB, CD non esse inter se parallelas.

Demonstratio.

Cum enim duo anguli BGH, AGH æquales sint duobus rectis, quemadmodum etiam duo GHC, GHD (*Lib. III. §. 40.*), si duo BGH, GHD minores fuerint duobus rectis, duo reliqui AGH, GHC duos rectos superabunt; ac proinde majores erunt duobus BGH, GHD. Igitur magis distracta sunt a recta GH segmenta AG, CH, quam ab eadem recta distracta sint segmenta BG, DH earundem rectarum AB, CD (*Ibid. §. 9.*). Ergo duæ rectæ AB, CD non ubique æqualiter a se mutuo distant; atque ideo non sunt inter se parallelæ (§. 4.). Igitur si in duas rectas &c. quod erat ostendendum. Fig. 23. Tab. I.

THEOREMA II.

Si in duas rectas lineas recta quædam incidens angulos internos ad easdem partes duobus rectis æquales fecerit, parallelæ erunt illæ duæ rectæ lineæ.

9. In duas rectas lineas AB, CD incidat recta quædam EF; sintque duo anguli interni ad easdem partes BGH, GHD duobus rectis æquales. Dico, rectas AB, CD esse inter se parallelas.

Demonstratio.

Enimvero cum duo anguli AGH, BGH, quemadmodum etiam duo CHG, GHD, valeant duos rectos (*Lib. III.* §.40.), si duo BGH, GHD æquales fuerint duobus rectis, duo quoque AGH, CHG duobus rectis æquales erunt. Itaque si duæ rectæ lineæ AB, CD non sunt parallelæ, si ad
Fig.24. Tab. I. unam eandemque partem ambæ producantur, sibi mutuo continuo accedent; contra vero ex alia continuo a se mutuo recedent (§.5.). Id autem contingere nequit in duabus rectis AB, CD. Quandoquidem cum duo anguli BGH, GHD æquales sint duobus AGH, CHG (*Syn. Alg.* §. 259.), quod tam illi, quam isti, ut modo ostensum est, valeant duos rectos, vel utrinque continuo sibi mutuo proximiores fient, si in directum producantur, adeo ut tandem simul utrinque jungantur, sicque spatium concludant, quod plane repugnat (§.7.); vel continuo magis magisque a se mutuo utrinque recedent, quod earum rectitudini ad evidentiam adversatur. Ergo duæ rectæ lineæ AB, CD hujusmodi erunt, ut in directum utrinque productæ, eamdem semper a se mutuo distantiam servent; ac proinde sint inter se parallelæ (§.1.). Si in duas ergo rectas lineas &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Si duæ rectæ lineæ eidem rectæ perpendiculares fuerint; erunt inter se parallelæ.

10. Ut si duæ rectæ lineæ AB, CD perpendiculares fuerint eidem rectæ
Fig.25. Tab. I. EF, illæ erunt inter se parallelæ. Cum enim hoc ipso rectus sit uterque angulus ABD, CDB (*Lib. III.* §. 23.), duo anguli interni ABD, CDB producti a recta EF in duas incidente AB, CD, erunt recti. Ergo *per hoc theorema* duæ rectæ AB, CD sunt parallelæ.

COROLLARIUM II.

Si recta in duas rectas incidente, angulus externus æqualis fuerit interno opposito ad easdem partes, parallelæ erunt illæ duæ recta lineæ.

11. Duæ nimirum AB, CD parallelæ erunt inter se, si angulus externus EGB æqualis fuerit interno opposito ad easdem partes GHD. Enimvero cum duo anguli EGB, BGH æquales sint duobus rectis (*Lib. III. §. 40.*), erunt quoque hoc ipso duo anguli interni BGH, GHD duobus rectis æquales; adeoque &c. Fig. 24. Tab. I.

COROLLARIUM III.

Si recta in duas rectas incidente, anguli alterni æquales fuerint; parallelæ erunt illæ duæ recta lineæ.

12. Si nempe incidente recta EF in duas rectas AB, CD, æquales fuerint anguli alterni AGH, GHD, duæ AB, CD erunt inter se parallelæ. Duo enim anguli interni BGH, GHD erunt hoc ipso æquales duobus rectis, cum duo anguli AGH, BGH valeant duos rectos (*ibid. §. 40.*). Fig. 24. Tab. I.

THEOREMA III.

Recta incidens in duas rectas parallelas angulos internos ad easdem partes duobus rectis æquales efficit.

13. In duas rectas parallelas AB, CD recta incidat EF. Dico, angulos internos ad easdem partes BGH, GHD esse duobus rectis æquales.

Demonstratio.

Duo siquidem anguli BGH, GHD nequeunt excedere duos rectos, neque a duobus rectis deficere. Non primum: quia cum duo AGH, BGH, sicuti etiam duo GH, C GHD, valeant duos rectos (*Lib. III. §. 40.*), adeoque omnes AGH, BGH, GHC, GHD simul sumti quatuor rectis sint æquales, si duo BGH, GHD majores essent duobus rectis, reliqui duo AGH, CHG a duobus rectis deficerent; ac proinde rectæ AB, CD non essent parallelæ (§. 8.). Non secundum; quia tunc duæ rectæ AB, CD parallelæ non essent inter se (§. 8.), quod est contra hypothesim. Duo ergo anguli BGH, GHD æquales sunt duobus rectis, si duæ lineæ AB, CD parallelæ inter se fuerint; adeoque recta incidens &c. quod erat ostendendum. Fig. 24. Tab. I.

COROLLARIUM I.

Recta in duas rectas parallelas incidens, externum angulum interno opposito ad easdem partes æqualem efficit.

14. Incidente nimirum recta EF in rectas parallelas AB, CD, angulus externus EGB æqualis erit interno opposito ad easdem partes GHD. Cum enim *per hoc theorema* duo anguli BGH, GHD valent duos rectos, æquales erunt duobus EGB, BGH, qui duos itidem rectos adæquant (*Lib.* III. §. 40.). Igitur ablato communi angulo BGH, erit reliquus EGB reliquo GHD æqualis (*Sym. Alg.* §. 266.).

Fig. 24. Tab. I.

COROLLARIUM II.

Recta incidens in duas rectas parallelas alternos angulos æquales efficit.

15. Ut si duæ AB, CD, in quas recta incidit EF, parallelæ fuerint, anguli alterni AGH, GHD erunt æquales. Etenim duo anguli BGH, GHD, utpote æquales duobus rectis æquales sunt duobus AGH, BGH, qui pariter duos rectos adæquant (*Lib.* III. §. 40.). Demto igitur communi BGH, erit reliquus AGH reliquo GHD æqualis (*Sym. Alg.* §. 266.).

Fig. 24. Tab. I.

COROLLARIUM III.

Recta uni parallelarum perpendicularis alteri quoque est perpendicularis.

16. Ut si recta *ab* perpendicularis fuerit rectæ CD, cui parallela sit recta AB, erit quoque ipsi AB perpendicularis. Cum enim *per hoc theorema* duo anguli *cab*, *abd* valent duos rectos, quemadmodum etiam duo *Aab*, *Cba*, nequit angulus *abd*, sicuti etiam angulus *ab*C, esse rectus, quin rectus, quoque sit uterque angulus *Aab*, *cab*; ac proinde non potest recta *ab* ad perpendiculum incumbere rectæ CD, quin pariter rectæ AB ad perpendiculum insistat (*Lib.* III. §. 24.).

Fig. 22. Tab. I.

THEOREMA IV.

Quæ eidem rectæ sunt parallelæ, inter se quoque sunt parallelæ.

17. Duæ rectæ lineæ AB, EF parallelæ sint eidem rectæ CD. Dico, rectas AB, EF inter se quoque esse parallelas.

Demonstratio.

Quoniam ex hypothesi duæ AB, CD sunt parallelæ, duo anguli interni ab easdem partes B*b*H, *b*HD producti a recta incidente *b*K, æquales erunt duobus rectis (§. 13.). Eadem ratione duo similiter DHK,

HKF

HKF duos rectos æquabunt. Quatuor igitur anguli BbH, bHD, DHK, HKF æquales erunt quatuor rectis. Duo autem bHD, DHK valent duos rectos (*Lib. III. §. 40.*). Ergo reliqui duo BbK, bKF duobus rectis æquales erunt. Sunt autem interni ad easdem partes. Ergo duæ rectæ AB, EF sunt parallelæ (§. 11.). Igitur quæ eidem rectæ &c. quod erat ostendendum. Fig. 26. Tab. I.

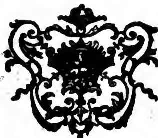
THEOREMA V.

Quæ uni rectarum parallelarum est parallela, alteri quoque est parallela.

18. Sint duæ rectæ parallelæ AB, CD quarum uni CD parallela sit recta EF. Dico, rectam EF alteri quoque AB esse parallelam.

Demonstratio.

Cum enim ex hypothesi angulus DHK sit æqualis angulo BbH (§. 14.), erunt duo BbK, bKF æquales duobus DHK, HKF. Sunt autem duo anguli DHK, HKF æquales duobus rectis (§. 15.), quod rectæ CD, EF positæ sint parallelæ. Ergo duo similiter anguli BbK, bKF duobus rectis æquales erunt (*Syn. Alg. §. 262.*). Sunt autem interni ad easdem partes. Ergo duæ EF, AB erunt parallelæ (§. 9.). Igitur quæ uni rectarum &c. quod erat ostendendum. Fig. 26. Tab. I.



ELEMENTORUM MATHEMATICORUM

LIBER V.

De triangulis planis rectilineis.

A *Lineis* ad *superficiem*, quæ est secunda species quantitatis continuæ permanentis, gradum facimus. Hæc figuras omnes planas complectitur. Quoniam vero omnium figurarum, quæ pluribus lineis continentur, maxime simplex *triangulum* est, ejusque cognitio ad cæterarum symptomata demonstranda requiritur, *triangulorum* naturam, & affectiones priori loco exponemus.

DEFINITIO I.

1. *Superficies est magnitudo duplici tantummodo dimensione, longitudinis nempe, & latitudinis, prædita*. Quæ diximus de *puncto*, & *linea*, de *superficie* quoque intelligenda sunt, videlicet *superficiem* haberi, si in corporibus ad longitudinem, & latitudinem dumtaxat attentio fiat. Hinc Proclus, *superficiei*, inquit, *cognitionem nos habere dicunt, cum agros dimetimur, eorumque extremitates juxta longitudinem, & latitudinem distinguimus. Sensum vero quemdam capere, umbras inspicientes. Cum enim ipsæ sine crassitudine sint, eoquod interiorem terræ partem penetrare non possunt, longitudinem tantum, atque latitudinem habent.*

SCHOLION.

2. Divisio superficiei est in *planam*, *curvam*, & *mixtam*, ut de linea diximus, eodemque modo hæc *superficierum* genera explicantur.

DEFINITIO II.

3. *Figura* generatim sumta *est magnitudo pluribus dimensionibus prædita, undique clausa*. Dicitur *pluribus dimensionibus prædita*, ut linea finita a figurarum serie excludatur. Sicuti ergo duo tantum sunt genera magnitudinum, quæ plures dimensiones habent, *superficies* nimirum, & *corpus*, ita duo tantum sunt prima figurarum genera, scilicet figura *plana*, & *solida*.

COROLLARIUM.

4. *Repugnat extensio figurata, quæ sit infinita.* Infinitum enim est, quod caret terminis. Figura vero necessario postulat, ut terminis comprehendatur.

SCHOLION.

5. Geometricarum figurarum præstantia tanta est, ut, si Vitruvio credimus, cum Aristippus ad Rhodiensium littus naufragio ejectus, Geometrica schemata conspexisset, lætus ad socios exclamasse dicitur: *Bene speremus; hominum enim vestigia video.*

DEFINITIO III.

6. *Figura plana est superficies una, vel pluribus lineis terminata.* Porro licet etiam superficies *curva*, & *mixta* una, vel pluribus lineis undique contineri queat; attamen *figura plana* non dicitur, nisi plana superficies undique clausa.

SCHOLION.

7. Habita ratione linearum, quibus *figura plana* terminatur, dividi solet *figura plana* in *rectilineam*, *curvilineam*, & *mixtam*.

DEFINITIO IV.

8. *Figura plana rectilinea est illa, quæ rectis lineis terminatur. Curvilinea, quæ una tantum, vel pluribus lineis curvis; mixtilinea vero, quæ partim recta, partim curva linea comprehenditur.* Figura plana *rectilinea* est ABC; *curvilinea* EDCA; *mixta* vero *de B*. Fig. 17. Fig. 19. Fig. 6. Tab. I.

DEFINITIO V.

9. *Latera figuræ dicuntur illæ lineæ, quibus ipsa figura continetur.* Sic tres rectæ lineæ AB, BC, CA sunt latera figuræ ABC. Fig. 17. Tab. I.

DEFINITIO VI.

10. *Perimeter figuræ*, qui etiam illius *ambitus* dicitur, *sunt omnes illæ lineæ simul sumtæ, quibus figura clauditur.* Sic tres lineæ AB, BC, CA, si sumantur simul, sunt *perimeter* figuræ rectilineæ ABC. Curva quoque linea CAED est *perimeter* figuræ curvilineæ CAED. Fig. 17. Fig. 19. Tab. I.

DEFINITIO VII.

11. *Area figuræ totum illud spatium vocatur, quod figuræ perimetro com-*
Fig.27. *prehenditur*. Sic area figuræ ABC est spatium contentum tribus rectis AB,
Tab. I. BC, CA, quæ ipsius figuræ *perimetrum* constituunt.

DEFINITIO VIII.

12. *Basis figuræ rectilineæ est illud latus, cui figura ipsa insistit*. Talis est
Fig.28. latus EF in figura DEF. Illi namque figura DEF incumbit.
Tab. I.

DEFINITIO IX.

13. *Vertex figuræ est illud perimetri punctum, quod basi oppositum est, at-*
Fig.29. *que ab illa maxime distat*. Sic punctum G est *vertex* figuræ GHK, sicuti
Fig.30. etiam punctum A in figura ABC. Utrumque enim opponitur ipsarum figu-
Tab. I. rarum basibus HK, BC, & ab illis maxime distat.

DEFINITIO X.

14. *Altitudo figuræ est recta linea ducta a vertice ipsius figuræ ad ejusdem*
Fig.27. *basim, eique ad perpendiculum incumbens*. Sic recta AD est altitudo figuræ
Tab. I. ABC. Cadit enim a *vertice* A in *basim* BC ipsius figuræ, estque ipsi basi perpendicularis.

SCHOLION.

15. Observandum tamen quammaxime est, rectam lineam, penes quam sumitur figuræ altitudo, quandoque uni ex lateribus ipsius figuræ congrue-
Fig.29. re, nec raro extra basim cadere. Primum patet in figura GHK, cujus alti-
Fig.30. tudo diversa non est a latere GH. Alterum vero contingit in figura ABC,
Tab. I. cujus altitudo est recta AE, quæ extra illius basim BC cadit. Tunc itaque, ut altitudo figuræ determinetur, ipsius figuræ basis in directum producenda est, eaque, veluti basis figuræ, est consideranda.

DEFINITIO XI.

16. *Figura rectilinea æquilatera dicitur illa, quæ æqualibus rectis lineis con-*
Fig.27. *tinetur*. Hujusmodi est figura ABC. Æqualia enim sunt inter se tria ipsius
Tab. I. latera AB, BC, CA.

DEFINITIO XII.

17. *Figura rectilinea vocatur æquiangula, cum omnes anguli sunt inter se æqua-*

æquales. Talis est figura ABC; cum æquales sint inter se tres ipsius anguli ABC, BCA, CAB. Fig. 17. Tab. I.

DEFINITIO XIII.

18. *Duæ figuræ rectilineæ dicuntur inter se muto æquilateræ, cum ita se habent, ut latera unius æqualia sint lateribus alterius, alterum alteri*. Ut si latus AB figuræ ABD æquale fuerit lateri *ab* figuræ *abd*, latus BD lateri *bd*, & latus AD lateri *ad*, duæ figuræ ABD, *abd* erunt *inter se mutuo æquilateræ*. Fig. 1. Fig. 2. Tab. II.

DEFINITIO XIV.

19. *Duæ figuræ rectilineæ inter se mutuo æquiangulæ dicuntur, cum anguli unius æquales sunt angulis alterius, alter alteri*. Sic duæ figuræ ABD, *abd* erunt *inter se mutuo æquiangulæ*, si angulus ABD æqualis fuerit angulo *abd*, angulus BDA angulo *bda*, & angulus DAB angulo *dab*. Fig. 1. Fig. 2. Tab. II.

DEFINITIO XV.

20. *Illa figura rectilinea dicitur regularis, quæ simul æquilatera est, & æquiangula*. Talis est figura ABC; cum omnia ipsius latera æqualia sint inter se, quemadmodum etiam omnes ipsius anguli. Fig. 17. Tab. I.

DEFINITIO XVI.

21. *Figura irregularis e contrario vocatur illa, quæ vel latera habet inæqualia inter se, vel angulos inæquales, vel nec angulos, nec latera habet æqualia*. Hujusmodi est figura DEF. Fig. 18. Tab. I.

DEFINITIO XVII.

22. *Triangulum planum est figura plana tribus tantum lineis terminata, totidemque angulos continens*. Si omnia ipsius latera sint lineæ rectæ, triangulum dicitur *rectilineum*; *curvilineum*, si omnia sint lineæ curvæ; *mixtilineum* vero, si alterum ipsorum laterum sit linea recta, alterum curva.

SCHOLION.

23. Triangulum planum *rectilineum*, de quo dumtaxat in præsens agimus, si spectetur penes latera, dividitur in *æquilaterum*, *isosceles*, & *scalenum*. Si vero consideretur penes angulos, quos continet, dividitur in *rectangulum*, *amblygonium*, & *oxygonium*.

DEFINITIO XVIII.

Fig.27. Tab. I. 24. *Triangulum æquilaterum dicitur illud, cujus tria latera sunt inter se æqualia*. Hujusmodi est triangulum ABC. Æqualia namque sunt inter se tria ipsius latera AB, BC, CA.

DEFINITIO XIX.

Fig.28 Tab. I. 25. *Triangulum isosceles est, cujus duo latera sunt æqualia*, ut triangulum DEF, cujus duo latera DE, DF sunt æqualia.

COROLLARIUM.

26. *Omne triangulum æquilaterum est isosceles*. Habet enim crura æqualia.

SCHOLION.

27. Licet quodlibet latus trianguli rationem basis habere possit, attamen in triangulo isoscese illud latus sumitur pro base, quod reliquis inæquale est. In triangulo vero æquilatero perinde est omnino, quodnam latus pro base sumatur.

DEFINITIO XX.

Fig.29. Tab. I. 28. *Triangulum scalenum est illud, cujus omnia latera sunt inæqualia*, ut triangulum GHK.

DEFINITIO XXI.

Fig.29. Tab. I. 29. *Triangulum rectangulum vocatur illud, quod unum trium angulorum habet rectum*. Hujusmodi est triangulum GHK, cum rectus sit ipsius angulus GHK.

DEFINITIO XXII.

Fig.29. Tab. I. 30. *Illud latus in triangulo rectangulo* hypothenusa *dici solet, quod recto ipsius angulo opponitur. Duo vero reliqua ipsius latera* cateti *vocantur*. Sic in triangulo rectangulo GHK *hypothenusa* est latus GK, quod opponitur angulo recto GHK; *cateti* vero sunt duo ipsius latera GH, HK.

DEFINITIO XXIII.

Fig.30. Tab. I. 31. *Triangulum amblygonium est illud, cujus unus trium angulorum obtusus est*, ut triangulum ABC, quod obtusum habet angulum ABC.

DEFINITIO XXIV.

32. *Triangulum oxygonium est illud, cujus omnes anguli sunt acuti*, ut triangulum DEF. Fig. 28. Tab. I.

DEFINITIO XXV.

33. *Illæ magnitudines dicuntur sibi mutuo congruere, quarum termini concidunt, si illarum una alteri applicetur*. Nimirum duo plana sibi mutuo congruunt, si unum alteri superpositum illud non excedat, neque ab illo excedatur.

AXIOMA I.

Quæ sibi mutuo perfecte congruunt, sunt inter se æqualia.

34. Potest enim unum illorum, salva quantitate, alteri substitui.

SCHOLION.

35. Conversum hujus axiomatis, videlicet *æqualia sibi mutuo congruere*, verum universaliter non est. Perspicuum enim fiet, plures extare magnitudines æquales inter se, quæ tamen sibi mutuo minime congruunt.

COROLLARIUM I.

36. *Figuræ, quæ sibi mutuo congruunt, sunt inter se mutuo æquilateræ, & æquiangulæ*. Æquales enim sunt tum penes latera, tum penes latera, tum penes angulos.

COROLLARIUM II.

37. *Figuræ rectilineæ inter se mutuo æquilateræ, & æquiangulæ sunt æquales*. Congruunt enim sibi mutuo, si illarum una alteri superponatur.

AXIOMA II.

Lineæ rectæ æquales sibi mutuo perfecte congruunt.

38. Cum enim extrema unius coincidant cum extremis alterius, nisi illarum una alteri tota congrueret, duæ ipsæ rectæ lineæ spatium concluderent, quod plane repugnat (*Lib. IV. §. 7.*).

AXIO-

AXIOMA III.

Anguli rectilinei, qui æquales sunt inter se, sibi mutuo perfecte congruunt.

39. Si namque anguli sunt æquales, eorum crura erunt æque distracta (*Lib. III.* §. 10.). Congruentibus propterea illorum apicibus, & uno crure unius super unum alterius cadente, alterum quoque super alterum cadat, necesse est. Quandoquidem si secus, ipsi anguli non essent æquales (*ibid.* §. 9.).

THEOREMA I.

Tres anguli cujuslibet trianguli plani rectilinei simul sumti, æquales sunt duobus rectis.

40. Esto triangulum planum rectilineum ABC. Dico, tres ipsius angulos ABC, BCA, BAC simul sumtos summam duorum rectorum conficere, sive duobus rectis esse æquales.

Demonstratio I.

Per verticem A ipsius trianguli transeat recta DE basi BC parallela. Igitur angulus ACB æqualis erit angulo EAC, & angulus ABC angulo
Fig. 1. DAB (*Lib. IV.* §. 15.). Quamobrem si alter angulus BAC duobus DAB,
Tab. I. EAC addatur, tres anguli ABC, BAC, ACB æquales erunt tribus DAB, BAC, CAE (*Syn. Alg.* §. 265.). Tres autem anguli DAB, BAC, CAE summam duorum rectorum conficiunt (*Lib. III.* §. 42.). Ergo tres quoque ABC, BAC, ACB duobus rectis æquales erunt (*Syn. Alg.* §. 262.); adeoque &c.

Demonstratio II.

In directum producto latere BC trianguli ABC in D, ex puncto C eri-
Fig. 2. gatur recta CE lateri AB ipsius trianguli parallela. Angulus ergo ABC
Tab. I. æqualis erit angulo ECD (*Lib. IV.* §. 14.), &, angulus BAC angulus BAC angulus ACE (*ibid.* §. 15.); atque adeo tres anguli ABC, BAC, ACB æquales erunt tribus ECD, ACE, ACB (*Syn. Alg.* §. 265.). Sunt autem tres ECD, ACE, ACB duobus rectis æquales (*Lib. III.* §. 42.). Ergo tres quoque ABC, BAC, ACB duobus rectis æquales erunt (*Syn. Alg.* §. 262.). Tres itaque anguli &c. quod erat ostendendum.

SCHOLION.

41. Hujus eximii theorematis inventio, si Eudemo veteri Geometræ fides habenda est, Pythagoræ accepta refertur. Frequentissime porro per univer-

sum

ſam Matheſim adhibetur, atque de eo ſæpe fit mentio ab Ariſtotele, ut ſcilicet exemplum perfectiſſimæ demonſtrationis exhibeat.

COROLLARIUM I.

Omnis trianguli plani rectilinei duo quicumque anguli minores ſunt duobus rectis.

42. Tres enim requiruntur, ut valor duorum rectorum habeatur.

COROLLARIUM II.

Quilibet angulus trianguli regularis adæquat tertiam partem duorum rectorum.

43. Cum enim omnes anguli trianguli regularis æquales ſint inter ſe (§. 20.), omneſque ſimul ſumti, ſummam duorum rectorum conficiant (§.40.), comperta res eſt, eorum quemlibet æquare tertiam partem duorum rectorum.

COROLLARIUM III.

Si unus trium angulorum unius trianguli rectus eſt, vel obtuſus, reliqui duo ſunt acuti.

44. Quippe ſi ſecus, tres anguli ipſius trianguli ſimul ſumti ſummam duorum rectorum excederent.

COROLLARIUM IV.

Tres anguli unius trianguli ſimul ſumti æquales ſunt tribus angulis alterius trianguli, ſi illi quoque ſimul ſumantur.

45. Cum enim tam illi, quam iſti valeant duos rectos (§. 40.), erunt inter ſe æquales (*Syn. Alg.* §. 259.).

COROLLARIUM V.

Si duo anguli unius trianguli æquales fuerit duobus angulis alterius trianguli, erit & reliquus reliquo æqualis. Et ſi unus trium angulorum unius trianguli æqualis fuerit uni angulorum alterius trianguli, etiam reliqui duo ſimul erunt reliquis duobus æquales.

46. Si namque æqualibus æqualia demantur, quæ remanent, ſunt æqualia (*ibid.* §. 266.).

COROLLARIUM VI.

Si unius trium angulorum unius trianguli rectus fuerit, reliqui duo summam conficient unius recti. Et vicissim, si duo anguli summam conficiunt unius recti, reliquus erit rectus.

47. Etenim tres ipsi anguli simul sumti, valent duos rectos (§. 40.).

COROLLARIUM VII.

Si unus trium angulorum unius trianguli reliquis duobus aequalis fuerit, rectus erit, & illi duo simul sumti unum quoque rectum aequabunt.

48. Tunc enim valor duorum rectorum angulorum bifariam dividitur. Constat autem, medietatem duorum rectorum angulorum valere unum angulum rectum. Ergo &c.

COROLLARIUM VIII.

A dato puncto ad datam rectam lineam una tantum recta perpendicularis duci potest.

49. Nimirum a puncto C una tantum recta perpendicularis cadere potest in rectam AB. Si namque potest fieri, sint duae rectae CD, CE perpendiculares ipsi AB. Igitur uterque angulus CDE, CED erit rectus (*Lib.* Fig. 33. Tab. I. III. §. 23.); ac proinde trianguli DCE duo anguli summam conficiunt duorum rectorum; quod repugnat (§. 41.). Ergo vel alterutra tantum rectarum CD, CE, vel neutra ad perpendiculum incumbit rectae AB.

THEOREMA II.

Omnis trianguli plani rectilinei uno latere in directum producto, externus angulus duobus internis oppositis est aequalis.

50. Trianguli plani rectilinei ABC latus quodcumque BC directe producatur in D. Dico, angulum externum ACD aequalem esse duobus angulis internis oppositis CBA, CAB simul sumtis.

Demonstratio I.

Tres anguli ABC, CAB, BCA simul sumti valent duos rectos (§. 40.), quemadmodum etiam duo ACB, ACD (*Lib.* III. §. 40.). Igitur duo anguli ACB, ACD aequales erunt tribus ABC, CAB, BCA (*Syn. Alg.* §. 258.). Quam-

Quamobrem sublato communi ACB, erit reliquus ACD reliquis duobus CAB, CBA æqualis (*ibid. §. 266.*); adeoque &c.

Demonstratio II.

Ex puncto C educatur recta CE parallela lateri AB. Angulus itaque externus ECD æqualis erit interno opposito ABC (*Lib.* IV. §. 14.), & angulus ACE alterno BAC (*ibid. §. 15.*); adeoque duo ECD, ACE duos ABC, BAC æquabunt. Est autem angulus ACD æqualis duobus ACE, ECD (*Syn. Alg. §. 256.*). Ergo angulus quoque ACD duobus ABC, BAC æqualis erit (*ibid. §. 261.*). Omnis itaque trianguli &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Omnis trianguli plani rectilinei uno latere directe producto, externus angulus major est interno opposito divisim ab aliis sumto.

51. Angulus nimirum ACD major est tum angulo ABC, tum angulo BAC. Angulus namque ACD utrumque simul ABC, BAC adæquat.

THEOREMA III.

In omni triangulo plano rectilineo angulus ille major est, qui majori lateri opponitur. Et vicissim illud latus est majus, quod majorem angulum subtendit.

I.

52. In triangulo plano rectilineo ABC esto latus AC majus latere AB. Dico, angulum quoque ABC ipsi AC oppositum majorem esse angulo ACB, qui latus minus AB subtendit.

Demonstratio.

Cum enim latus AC majus sit latere AB ipsius trianguli ABC; evidens est, magis a se mutuo distracta esse latera AB, BC, quam latera AC, CB. Ille autem angulus est major altero, qui crura magis distracta habet (*Lib. III. §. 9.*). Ergo angulus ABC major erit angulo ACB, adeoque &c. Fig. 30. Tab. I.

II.

53. Vicissim vero in eodem triangulo plano rectilineo ABC angulus ABC major sit angulo ACB. Dico, latus AC, quod majori angulo ABC opponitur, majus esse latere AB, quod minori angulo ACB subtenditur.

De-

Demonstratio.

Si namque angulus ABC major eſt angulo ACB ejuſdem trianguli ABC, magis a ſe mutuo diſtracta erunt latera AB, BC, quam latera AC, CB (*Lib.*III.§.9.). Ergo latera AB, BC majorem, ut patet, intercipient lineam, quam latera AC, CB; eritque propterea latus AC majus latere AB. Itaque in omni triangulo &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

In triangulo rectangulo majus latus eſt hypotenuſa. In triangulo vero amblygonio majus latus eſt illud, quod angulo obtuſo opponitur.

54. In triangulo namque *rectangulo* angulus rectus eſt reliquis duobus major, quemadmodum etiam angulus obtuſus in triangulo *amblygonio*. Etenim ſi in uno triangulo unus angulus rectus eſt, vel obtuſus, reliqui ſunt acuti (§. 44.).

COROLLARIUM II.

In triangulo ſcaleno tres anguli ſunt inter ſe inæquales.

55. Siquidem triangulum ſcalenum habet tria latera inter ſe inæqualia (§. 28.).

COROLLARIUM III.

Latera trianguli, cujus anguli inæquales ſint inter ſe, ſunt inæqualia.

56. Majori enim angulo majus latus opponitur.

COROLLARIUM IV.

Recta perpendicularis minima eſt omnium rectarum, quæ ab eodem puncto ad eandem rectam duci poſſunt.

57. Ducantur enim a puncto C ad rectam AB quamplures rectæ lineæ CD, CE, CF, quarum CD ipſi AB ad perpendiculum inſiſtat. Igitur cum angulus CDE ſit rectus (*Lib.* III. §. 23.), angulus CED erit acutus (§. 44.), adeoque minor angulo CDE (*Lib.* III. §. 20.). Quamobrem *per hoc theorema* latus CE majus erit latere CD. Eadem ratione recta CF eandem CD ſuperabit, omneſque aliæ, quæ a puncto C in rectam AB cadere poſſunt, ipſa CD majores erunt. Perpendicularis itaque eſt omnium minima.

Fig. 13. Tab. I.

SCHO

SCHOLION I.

58. Ex eo, quod recta perpendicularis sit omnium minima, liquido apparet, cur magnitudinis cujuscunque mensura penes *perpendicularem* unice sumatur. Mensura namque debet esse certa, & determinata apud omnes, hujusmodi nimirum, ut diversitas in ejus aeceptione contingere minime possit. Manifestum est autem, solam *perpendicularem* esse hujusmodi, hoc ipso quod est omnium earum minima, penes quas mensura sumi potest; adeoque &c.

SCHOLION II.

59. Hinc deducitur, tres tantum esse dimensiones, videlicet *longitudinis*, *latitudinis*, & *profunditatis*; ac proinde tres tantum species quantitatis continuæ permanentis, *lineam* nimirum, *superficiem*, & *corpus*. Tres enim dumtaxat rectæ lineæ per idem punctum duci possunt, quæ sint sibi invicem perpendiculares (a).

THEOREMA IV.

Anguli, qui sunt ad basim trianguli isosceles, æquales sunt inter se, & productis lateribus, anguli quoque infra basim sunt æquales.

Esto triangulum isosceles ABC, cujus nimirum duo latera AB, AC sint æqualia. Fig. 34. Tab. I.

I.

60. Dico primo, angulos ABC, ACB, qui sunt ad basim BC, esse inter se æquales.

Demonstratio.

Etenim, si fieri potest, inæquales sint anguli ABC, ACB, sitque angulus ABC major angulo ACB. Igitur latus AC majus erit latere AB (§.53.). Hoc autem est contra hypothesim. Ergo anguli ABC, ACB non sunt inæquales, sed æquales.

II.

61. In directum producantur latera AB, AC. Dico, angulos quoque DBC, ECB infra basim BC esse æquales.

(a) Vide Clavium Com. in Sphæram Joan. a S. Bosco pag. mi 14.

Demonstratio.

Quoniam tam duo ABC, DBC, quam duo ACB, BCE valent duos rectos (*Lib. III.* 40.), duo ABC, CBD æquales erunt duobus ACB, BCE (*Syn. Alg.* §. 259.). Ostensum est autem, etiam duos ABD, ACB esse æquales. Ergo illis sublatis, qui remanent DBC, ECB, erunt æquales (*ibid.* § 266.). Itaque anguli &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Triangulum æquilaterum est etiam æquiangulum.

62. Si nimirum tria latera AB, BC, CA trianguli ABC sunt inter se æqualia, etiam tres ipsius anguli erunt æquales. Ob æqualitatem namque laterum AB, AC duo anguli ABC, ACB sunt æquales (§. 60.). Eadem ratione æquales sunt etiam duo ABC, CAB. Ergo tres anguli ABC, ACB, CAB sunt æquales (*Syn. Alg.* §. 259.).

Fig. 14. Tab. I.

COROLLARIUM II.

Omne triangulum æquilaterum est regulare.

63. Est enim æquilaterum, & æquiangulum (§. 62.).

COROLLARIUM III.

Tres anguli trianguli æquilateri sunt acuti.

64. Cum enim triangulum æquilaterum sit regulare (§. 63.), quilibet angulus ipsius trianguli erit tertia pars duorum rectorum (§. 44.). Ergo eorum quilibet erit minor recto, adeoque acutus.

THEOREMA X.

Si trianguli plani rectilinei duo anguli æquales fuerint, etiam latera eos subtendentia erunt æqualia.

Fig. 34. Tab. I. 65. Trianguli plani rectilinei ABC duo anguli ABC, ACB sint inter se æquales. Dico, latera quoque AB, AC, quæ illis respondent, esse æqualia.

Demonstratio.

Quandoquidem esto, si fieri potest, latus AB majus latere AC. Consectarium est, ut angulus ACB, utpote qui majori lateri opponitur, angulum ABC excedat (§. 52.). Posuimus autem angulos ABC, ACB inter se æqua-

æquales. Ergo latera AB, AC non sunt inæqualia, sed æqualia.

Corollarium I.

Omne triangulum æquiangulum est etiam æquilaterum.

66. Ut si triangulum ABC fuerit æquiangulum, erit etiam æquilaterum. Si namque duo anguli ABC, ACB sunt inter se æquales, æqualia itidem erunt duo ipsius latera AB, AC (§. 65.). Eandem ob causam æqualia erunt duo latera AC, CB. Quæ autem eidem sunt æqualia, inter se sunt æqualia (*Syn. Alg.* §. 259.). Ergo duo quoque latera AB, CB erunt æqualia; atque adeo triangulum ABC erit æquilaterum. Fig. 27. Tab. I.

Corollarium II.

Omne triangulum æquiangulum est regulare.

67. Si namque omne triangulum æquiangulum est etiam æquilaterum, habet quidquid requiritur, ut figura regularis dici possit (§. 20.).

Corollarium III.

Quilibet angulus trianguli æquianguli est acutus.

68. Cum enim triangulum æquiangulum sit regulare (§. 67.), quilibet angulus ipsius trianguli adæquat unam tertiam partem duorum rectorum (§. 43.), adeoque &c.

Theorema VI.

Omnis trianguli plani rectilinei duo qualibet latera reliquo sunt majora.

69. Esto triangulum ABC. Dico, duo ipsius latera AC, AB simul sumta rectam constituere majorem latere CB. Fig. 35. Tab. I.

Demonstratio.

In directum producto latere BA, fiat segmentum AD æquale lateri AC, & ducatur recta DC. Cum igitur duo latera AC, AD sint æqualia, æquales erunt anguli ADC, ACD (§. 60.). Est autem angulus DCB major angulo DCA (*Syn. Alg.* §. 257.). Ergo major quoque erit angulo ADC (*ibid.* §. 264.); ac proinde latus DB, utpote majori angulo oppositum, majus erit latere CB (§. 53.). Posuimus autem latus DB æquale duobus CA, AB. Ergo etiam duo CA, AB majora erunt reliquo CB (*Syn. Alg.* §. 264.). Omnis itaque trianguli &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Linea recta brevissima est omnium linearum eadem extrema habentium.

70. Ab extremo A ad extremum C quamplures ducantur lineæ AC; Fig.36. Tab. I. ABC, ADC, AEC, quarum AC sit recta. Manifestum *ex hoc theoremate*, rectam AC esse omnium minimam. Etenim sumto in curva ABC puncto B, ductisque ad extrema A, C rectis BA, BC, erunt duæ lineæ AB, BC majores, si simul sumantur, recta AC. Est autem curva ABC major rectis AB, BC, ut patet, & facile ostendetur, comparando curvam AB cum recta AB, & curvam BC cum recta BC. Ergo curva ABC major quoque erit recta AC. Eodem modo ratiocinare de aliis quibuscumque curvis, quæ a puncto A ad punctum C duci possunt; adeoque &c.

SCHOLION.

71. Hinc distantia unius puncti ab altero in eodem plano considerari debet penes rectam ab uno ad alterum ductam. Hæc enim, cum sit ceterarum omnium, quæ intra ipsa puncta contineri possunt, brevissima, erit quoque certa, fixa, & stabilis, prout ad mensuram requiritur.

THEOREMA VII.

Si in triangulo plano rectilineo punctum aliquod accipiatur, a quo ad extrema basis duæ rectæ ducantur, istæ minores erunt lateribus ipsius trianguli, sed majorem angulum continebunt.

72. Esto triangulum planum rectilineum DCB, in quo punctum aliquod accipiatur.

Primus casus.

Fig.37. Tab. I. Et quidem primo in latere DB, sitque illud punctum A. Ducatur autem ab hoc puncto ad extremum C basis CB ipsius trianguli recta AC. Dico, duo latera AC, AB minora esse lateribus DC, DB ipsius trianguli, sed angulum CAB majorem esse angulo CDB.

Demonstratio.

Duo latera CD, DA trianguli CAD majora sunt reliquo CA (§. 69.). Quamobrem addito communi AB, erunt duo CD, DB majora duobus CA, AB (*Syn. Alg.* §. 268.). Est autem angulus CAB externus; internus vero oppositus, angulus CDA, ut patet. Ergo angulus CAB major erit angulo CDB (§. 51.); adeoque &c.

Secun-

Secundus casus.

Sumatur modo punctum in area trianguli, sitque punctum O, a quo ad extrema basis CB ducantur rectæ OC, OB. Dico, rectas OC, OB minores esse lateribus CD, DE, sed angulum COB majorem esse angulo CDB.

Demonstratio.

Recta CO directe producta in A (*Lib. III. §.* 33.), erunt duo latera OA, AB majora reliquo OB (§. 72.); quocirca addito CO, erunt duo CA, AB majora duobus CO, OB (*Syn. Alg.* 268.). Sunt autem duo CD, DB majora duobus CA, AB, ut modo demonstravimus. Ergo duo CD, DB majora quoque erunt duobus CO, OB (*ibid.* §. 264.). Rursus angulus CAB major est angulo CDB. Angulus autem COB eandem ob causam major est angulo CAB (§. 51.). Ergo a fortiori angulus COB angulum CDB superabit. Itaque si in triangulo plano &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA VIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, alterum alteri; habuerint autem & angulum angulo æqualem, qui æqualibus lateribus continentur, & basim basi æqualem habebunt, eritque totum triangulum toti triangulo æquale.

Sint duo triangula plana rectilinea ABD, *abd*, quorum duo latera AB, *ab* æqualia sint inter se, quemadmodum etiam duo AD, *ad*. Angulus quoque BAD angulum *bad* adæquet, qui æqualibus lateribus continentur.

I.

73. Dico primò, basim quoque BD basi *bd* esse æqualem.

Demonstratio.

Cum enim anguli BAD, *bad* positi sint æquales, æque distracta erunt latera BA, AD; *ba*, *ad* (*Lib. III.* §. 10.). Sunt autem latera ipsa *respective* inter se æqualia per hypothesim. Ergo æquales rectas intercipient, nempe basis BD basim *bd* æquabit. Fig. 1. Fig. 2. Tab. I.

II.

74. Dico secundo, triangulum ABD æquale esse triangulo *abd*.

Demonstratio.

Cum enim latera unius trianguli æqualia sint lateribus alterius, alterum alteri, & angulus BAD angulo *bad*, si unum triangulum alteri superponatur, congruet angulus BAD angulo *bad* (§. 39.), latus AB lateri *ab*, & latus AD lateri *ad* (§. 38.), nec non basis BD basi *bd*, cum etiam ipsæ ostensæ sint æquales. Hinc congruet quoque angulus ABD angulo *abd*, & angulus ADB angulo *adb*, ac proinde totum triangulum ABD toti triangulo *abd*. Æqualia autem sunt inter se, quæ sibi mutuo perfecte congruunt (§. 34.). Ergo totum triangulum ABD æquale erit toti triangulo *abd*. Itaque si duo triangula &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Rectæ, quæ rectas æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt, sunt inter se æquales.

75. Ut si duæ rectæ æquales, & parallelæ AB, CD jungantur rectis AC, BD, duæ AC, BD erunt inter se æquales. Ducta enim ab extremo puncto A ad extremum oppositum D recta AD, duo anguli alterni BAD, CDA erunt æquales (*Lib. IV §.* 15.). Positæ sunt autem æquales duæ rectæ AB, CD, & recta AD communis est utrique triangulo BAD, ADC. Ergo bases quoque, sive rectæ AC, BD erunt æquales (§. 73.).

Fig. 3. Tab.II.

THEOREMA IX.

In triangulo isoscele recta ducta ab angulo verticali ad basim, si ipsum angulum bifariam dividat, ejusdem quoque basim dividet bifariam.

76. Esto triangulum isosceles ABC, ab eujus verticali angulo BAC, qui æqualibus lateribus AB, AC continetur, ducatur ad basim BC recta AD, quæ angulum ipsum verticalem BAC bifariam dividat. Dico, rectam AD bifariam quoque secare basim BC.

Fig. 4. Tab.II.

Demonstratio.

Cum enim duo latera AB, AC sint æqualia, per hypotesim, & latus AD sit utrique triangulo BAD, DAC commune, si ponatur angulus BAD æqualis angulo DAC, duo triangula BAD, DAC habebunt duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & angulum angulo, qui æqualibus lateribus continentur, æqualem. Ergo etiam basis BD æquabit basim DC (§. 73.) Igitur in triangulo, &c. quod erat ostendendum.

C o-

Corollarium.

In triangulo æquilatero recta ducta ab uno angulo ad latus oppositum; si ipsum angulum bifariam dividat, latus quoque ipsum dividet bifariam.

77. Omne enim triangulum æquilaterum est isosceles (§. 26.); cumque duo quælibet ipsius latera sint æqualia (§. 24.), quilibet angulus pro vertice sumi potest.

THEOREMA X.

In triangulo isoscele recta ducta ab angulo verticali ad basim, eique ad perpendiculum incumbens, basim ipsam bifariam dividit.

78. Ab angulo verticali BAC trianguli isoscelis BAC ad basim BC ducatur recta AD, quæ ipsi basi BC perpendiculariter incumbat. Dico, rectam AD bifariam dividere ipsam basim BC.

Demonstratio.

Cum enim ob hypothesim duo anguli ADB, ADC sint recti (*Lib. III.* §. 13.), æquales erunt inter se (*ibid.* §. 37.). Sunt autem etiam duo ABC, ACB inter se æquales (§. 60.). Ergo reliquus quoque BAD reliquo DAC æqualis erit (§. 46.); atque adeo recta AD verticalem angulum BAC bifariam dividet. Igitur bifariam quoque dividit basim BC (§. 76.). In triangulo itaque isoscele recta &c. quod erat ostendendum. Fig. 4. Tab. II.

Corollarium I.

In triangulo isoscele recta ducta ab angulo verticali ad basim, eique ad perpendiculum incumbens, dividit bifariam ipsum angulum, atque adeo etiam totum triangulum.

79. Demonstravimus enim, æquales esse inter se angulos BAD, DAC, in quos verticalis BAC a recta AD basi BC ad perpendiculum insistente dividitur. Quamobrem, cum latus AB sit æquale lateri AC (§. 25.), & latus AD sit commune utrique triangulo ADB, ADC, triangulum quoque ADB erit triangulo ADC æquale (§. 74.). Fig. 4. Tab. II.

Corollarium II.

In triangulo æquilatero recta ducta ab uno suorum angulorum ad latus oppositum, eique perpendiculariter incumbens, dividit bifariam tum ipsum angulum, tum ipsum latus, necnon totum ipsum triangulum.

80. Etenim, cum omne triangulum æquilaterum sit isosceles (§. 26.), quæ modo ostensa sunt de triangulo isoscele, de æquilatero itidem sunt intelligenda.

Corollarium III.

Recta, quæ metitur altitudinem trianguli isoscelis, & æquilateri, cadit intra ipsius latera.

81. Altitudo namque utriusque trianguli sumitur penes rectam, quæ ab angulo verticali cadit in basim, eique ad perpendiculum incumbit (§.14.).

Theorema XI.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, alterum alteri; habuerint autem etiam basim basi æqualem, angulum quoque angulo, qui æqualibus respective lateribus continentur, æqualem habebunt, eritque totum triangulum toti triangulo æquale.

Fig. 1. Fig. 2. Tab.II. Sint duo triangula plana rectilinea ABD, *abd*, quorum duo latera AB, *ab* æqualia sint inter se, sicuti etiam duo AD, *ad*. Bases quoque BD, *bd* sint inter se æquales.

I.

82. Dico primo, angulos BAD, *bad*, qui æqualibus *respective* lateribus continentur, esse inter se æquales.

Demonstratio.

Posita namque æqualitate laterum AB, *ab*; AD, *ad*, nequeunt bases BD, *bd* esse æquales inter se, quin distractio laterum AB, AD adæquet distractionem laterum *ab*, *ad*; ac proinde quin anguli BAD, *bad* sint inter se æquales (*Lib.* III. §. 10.). Bases autem BD, *bd* positæ sunt æquales. Ergo anguli quoque BAD, *bad* inter se æquales erunt; adeoque &c.

II.

83. Dico secundo, totum triangulum BAD æquale esse toti triangulo *bad*.

Demonstratio.

Cum enim latera sint *respective* inter se æqualia, sit nimirum AB=*ab*, BD=*bd*, DA=*ba*, congruent sibi mutuo tam duo AB, *ab*, quam duo BD, *bd*, sicuti etiam duo DA, *da* (§. 38.). Ergo totum triangulum ABD congruet toti triangulo *abd* (§. 33.); eruntque proinde ipsa triangula inter se æqualia (§. 34.). Si ergo duo triangula &c. quod erat ostendendum.

Corollarium I.

Omnia triangula inter se mutuo æquilatera, sunt æqualia.

84. Ostensum est enim, ea sibi mutuo congruere, si unum alteri superponatur.

Corollarium II.

Duo triangula inter se mutuo æquilatera, sunt etiam inter se mutuo æquiangula, æquales nimirum habent angulos, qui æqualibus lateribus opponuntur.

85. Non enim potest perimeter trianguli BAD congruere perimetro trianguli *bad*, sicuti alter alteri congruit, si triangula sint æquilatera inter se mutuo, quin eorum anguli itidem sibi mutuo congruant, alter alteri, qui æqualibus lateribus opponuntur, videlicet ABD, *abd* * BDA, *bda* * BAD, *bad*. Ergo eorum anguli erunt æquales, alter alteri (§. 34.); ac proinde &c. Fig. 1. Fig. 2. Tab. II.

Corollarium III.

In triangulo isosceles recta ducta ab angulo verticali ad basim, eamque bifariam dividens, ipsum quoque angulum dividit bifariam.

86. Si nimirum in triangulo isosceles BAC recta AD ducta ab angulo verticali BAC ad basim BC, ipsam bifariam dividat, bifariam quoque dividet angulum BAC. Enimvero cum duo latera AB, AC sint æqualia (§. 25.), & latus AD sit commune utrique triangulo BAD, DAC, posita æqualitate duorum BD, DC, duo triangula BAD, DAC erunt inter se mutuo æquilatera (§. 18.). Ergo erunt etiam inter se mutuo æquiangula, habebuntque angulos BAD, DAC æqualibus lateribus oppositos, inter se æquales (§. 35.). Fig. 4. Tab. II.

Co-

COROLLARIUM IV.

In triangulo æquilatero recta ducta ab uno angulorum ad latus oppositum, ipsumque latus bifariam dividens, angulum quoque ipsum dividit bifariam.

87. Omne siquidem triangulum æquilaterum est isosceles (§. 26.).

COROLLARIUM V.

Rectæ, quæ duas rectas æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt, sunt inter se parallelæ.

88. Ut si duæ rectæ AB, CD æquales inter se, & parallelæ, jungantur duabus rectis AC, BD, ipsæ quoque AC, DB erunt parallelæ. Cum enim duæ AC, BD sint hoc ipso æquales (§. 75.), si ab extremo A ad oppositum D ducatur recta AD, duo triangula ABD ADC erunt inter se mutuo æquilatera (§. 18.), adeoque etiam æquiangula, eritque angulus ADB angulo DAC æqualis (§. 85.). Sunt autem alterni, ut patet. Ergo duæ rectæ AC, BD erunt parallelæ (*Lib IV.* 12.).

THEOREMA XII.

In triangulo isoscele recta ducta ab angulo verticali ad basim, eamque bifariam dividens, est ipsi basi perpendicularis.

89. Ab angulo verticali BAC trianguli isoscelis BAC ducatur ad basim BC recta AD, quæ basim ipsam bifariam dividat. Dico, rectam AD esse basi BC perpendicularem.

Demonstratio.

Etenim ob hypothesim duo triangula BAD; DAC erunt inter se mutuo
Fig. 4. æquilatera (§. 18.). Igitur angulus ADB æquabit angulum ADC (§. 85.),
Tab.II. qui sunt æqualibus lateribus AB, AC oppositi (§. 25.). Duo autem anguli ADB, ADC valent duos rectos (*Lib.* III. §. 40.). Ergo uterque erit rectus; ac proinde recta AD perpendiculum rectæ BC incumbit (*ibid.* §. 24). In triangulo itaque isoscele &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

In triangulo æquilatero recta ducta ab uno trium angulorum ad latus oppositum, ipsumque bifariam dividens, est eidem perpendicularis.

90. Triangulum quippe æquilaterum est isosceles (§. 26.), in quo perinde omnino est, quodcumque latus pro base sumatur (§. 27.).

THEOREMA XIII.

In triangulo isoscele recta ducta ab angulo verticali ad basim, ipsumque angulum bifariam dividens, est basi perpendicularis.

91. In triangulo isoscele ABC ducatur ab angulo verticali BAC ad basim BC recta AD, dividens angulum ipsum bifariam. Dico, rectam AD perpendiculariter basi BC insistere.

Demonstratio.

Cum enim duo anguli ABC, ACB sint æquales (§. 60.), sicuti etiam duo BAD, DAC per hypothesim, etiam reliquus BDA reliquo ADC æqualis erit (§. 46.). Duo autem ADB, ADC æquales sunt duobus rectis (*Lib.* III. §. 40.). Ergo uterque erit rectus; ac propterea recta AD ad perpendiculum basi BC incumbet (*ibid.* §. 24.). Itaque in triangulo isoscele &c. quod erat ostendendum. Fig. 4. Tab. II.

COROLLARIUM.

In triangulo æquilatero recta ducta ab uno trium angulorum ad latus oppositum, ipsumque angulum bifariam dividens, est eidem lateri perpendicularis.

92. Omne siquidem triangulum æquilaterum est isosceles (§. 26.), simulque æquiangulum (§ 62.).

THEO-

THEOREMA XIV.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quæ æqualibus angulis adjacent, vel quæ uni æqualium angulorum subtenduntur, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, alterum alteri, eritque totum triangulum toti triangulo æquale.

I.

93. Duo anguli ABD, *abd* triangulorum BAD, *bad* æquales sint inter
Fig. 1. se, sicuti etiam duo ADB, *adb*. Unum quoque latus unius tranguli unum
Fig. 2. latus alterius adæquet,
Tab.II.

Primus casus.

Et quidem primo æqualia sint latera, quæ æqualibus angulis adjacent, nimirum BD, *bd*. Dico, latus quoque AB æquale esse lateri *ab*, & latus AD lateri *ad*.

Demonstratio.

Cum enim latera BD, *bd* sint æqualia, congruent sibi mutuo, si eorum unum alteri superponatur (§. 38.). Eandem quoque ob causam congruet angulus ABD angulo *abd*, & angulus ADB angulo *adb* (§. 39.). Ergo latus AB congruet lateri, *ab*, & latus AD lateri *ad*, nec non apex A apici *a*. Quippe si secus, anguli illi sibi mutuo haudquaquam congruerent. Æqualia autem sunt inter se, quæ sibi mutuo congruunt (§. 34.). Ergo duo latera AB, *ab* sunt inter se æqualia.

Secundus casus.

Æqualia modo sint duo latera AB, *ab*, quæ æqualibus angulis ADB, *adb* adjacent. Dico, etiam reliqua latera esse reliquis lateribus æqualia, videlicet latus BD lateri *bd*, & latus DA lateri *da*.

Demonstratio.

Enimvero, cum ex hypothesi duo anguli ABD, ADB æquales sint duobus *abd*, *adb*, etiam reliquus BAD reliquo *bad* æqualis erit (§.46.). Æqualia igitur latera AB, *ab* æqualibus angulis adjacent. Ergo *per demonstrationem præcedentem* reliqua latera BD, DA reliquis lateribus *bd*, *da* æqualia erunt, alterum alteri; adeoque &c.

II.

II.

94. Hisce positis dico, totum triangulum ABD toti triangulo *abd* esse æquale.

Demonstratio.

Duo enim triangula ABD, *abd* sunt inter se mutuo æquilatera, ut modo demonstravimus. Ergo sunt inter se æqualia (§. 84.). Itaque si duo triangula &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, alterum alteri, sed angulum angulo majorem, qui æqualibus respective lateribus continentur, basis quoque unius basi alterius major erit.

95. Sint duo triangula plana rectilinea ABD, *abd*, quorum duo latera AB, *ab* æqualia sint inter se, sicuti etiam duo AD, *ad*. Angulus autem BAD major sit angulo *bad*. Dico, basim quoque BD majorem esse base *bd*. Fig. 5. Fig. 6. Tab. II.

Demonstratio.

Cum enim angulus BAD major sit angulo *bad*, distracta a se mutuo magis erunt duo latera AB, AD, quam duo *ab*, *ad* (*Lib. III. §. 9*). Sunt autem illa latera *respective* inter se æqualia. Ergo majorem rectam intercipient duo AB, AD, quam duo *ab*, *ad*; eritque propterea recta BD major, quam recta *bd*. Itaque si duo triangula &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XVI.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, alterum alteri, & basim base majorem, angulus quoque unius angulo alterius, qui æqualibus lateribus continentur, major erit.

96. Sint duo triangula plana rectilinea ABD, *abd*, quorum duo latera AB, *ab* æqualia sint inter se, sicuti etiam duo AD, *ad*. Basis vero BD major sit base *bd*. Dico, angulum BAD angulo *bad* majorem esse. Fig. 5. Fig. 6. Tab. II.

Demonstratio.

Etenim stante illa æqualitate laterum AB, *ab*; AD, *ad*, non potest basis BD superare basim *bd*, quin magis a se mutuo distracta sint duo latera AB, AD, quam duo *ab*, *ad*. Latera autem magis distracta majorem angulum continent (*Lib. III. §. 9.*). Ergo angulus BAD major erit angulo *bad*. Si ergo duo triangula &c. quod erat ostendendum.

ELE-

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM

LIBER VI.

De quadrilateris, & polygonis.

TRiangulas figuras consequuntur *quadrilatera*, & *polygona*. Cum igitur de *triangulis* superiori libro actum sit, nunc consequenter de *quadrilateris*, & *polygonis* est agendum.

DEFINITIO I.

1. *Quadrilaterum planum rectilineum est figura plana quatuor tantummodo rectis lineis terminata, totidemque angulos continens*. Dividitur autem in *quadratum*, *altera parte longius*, *rombum*, *romboidem*, & *trapezium*.

DEFINITIO II.

Fig. 7. Tab.II. 2. *Quadratum est quadrilaterum, cujus omnia latera aequalia sunt inter se; quemadmodum etiam quatuor ipsius anguli*. Hujusmodi est quadrilaterum ABDC.

COROLLARIUM.

3. *Quadratum est figura regularis*. Est enim figura aequilatera, & aequiangula.

DEFINITIO III.

4. *Altera parte longius est quadrilaterum, cujus omnes anguli aequales quidem sunt inter se, at ex lateribus opposita tantum sunt inter se aequalia*. Tale est quadrilaterum ABCD. Aequales enim sunt omnes ipsius anguli. Verum ex lateribus duo tantum AD, BC, sicuti etiam duo AB, DC, quae nimirum sibi mutuo adversantur, sunt aequalia.

Fig. 8. Tab.II.

DEFINITIO IV.

5. *Rombus est quadrilaterum habens omnia latera aequalia, & angulos duntaxat, qui sunt ex adverso, aequales*. Hujusmodi est quadrilaterum ABCD. Omnia enim ipsius latera sunt aequalia; non omnes tamen ipsius anguli sese mutuo adaequant, sed duo tantum BAD, BCD, sicuti etiam duo ABC, ADC, qui sibi muto ex adverso consistunt.

Fig. 9. Tab.II.

DE-

DEFINITIO V.

6. *Romboides est quadrilaterum, cujus opposita tantum latera sunt inter se æqualia, sicuti etiam oppositi anguli*, ut quadrilaterum ABCD, cujus duo opposita latera AD, BC æqualia sunt inter se, quemadmodum etiam duo AB, DC. Duo quoque oppositi anguli BAD, BCD; ABC, ADC sunt sibi mutuo æquales. Fig. 10. Tab. II.

DEFINITIO VI.

7. Reliqua vero ab his quadrilatera, *quorum nempe omnia latera inæqualia sunt inter se, quemadmodum etiam omnes ipsorum anguli, trapezia vocantur.*

DEFINITIO VII.

8. *Parallelogrammum est quadrilaterum, cujus opposita latera sunt parallela.* Tale est quadrilaterum ABCD. Parallela namque sibi mutuo sunt tam duo latera AD, BC, quam duo AB, DC, quæ sibi adversantur. Fig. 10. Tab. II.

DEFINITIO VIII.

9. *Rectangulum est parallelogrammum, cujus singuli anguli sunt recti*, ut parallelogrammum ABCD. Fig. 8. Tab. II.

DEFINITIO IX.

10. *Diameter, sive diagonalis parallelogrammi est recta ducta ad oppositos parallelogrammi angulos.* Sic recta AD est *diameter*, seu *diagonalis* parallelogrammi ACDB. Fig. 3. Tab. II.

DEFINITIO X.

11. *Polygonum est figura plana pluribus, quam quatuor rectis lineis comprehensa.* Sicuti autem numerus laterum augeri potest in infinitum, ita *polygoni* infinitæ penitus sunt species, quæ a laterum numero denominantur. Dicitur enim *pentagonum*, si quinque lateribus; *hexagonum*, si sextem; *decagonum*, si decem; *chyliogonum*, si 1000.; *myriogonum*, si 10000. lateribus polygonum ipsum comprehendatur.

DEFINITIO XI.

12. *Spatia, seu intervalla plurium rectarum parallelarum æqualia sunt inter se, si rectæ perpendiculares, quæ inter illas cadunt, sint æquales.* Sic interval-

la

Fig. 11. Tab. II. la rectarum parallelarum AB, CD, EF sunt æqualia; quia perpendiculares GH, KL inter illas comprehensæ sunt æquales.

THEOREMA I.

Quatuor anguli cujuslibet quadrilateri æquales sunt quatuor rectis.

Fig. 3. Tab. II. 13. Esto quadrilaterum ACDB. Dico quatuor ipsius angulos ACD, CDB, DBA. BAC summam quatuor rectorum conficere.

Demonstratio.

Ducta recta AD, seu quadrilatero ACDB in duo triangula diviso, quatuor ipsius anguli ACD, CDB, DBA, BAC æquales sunt sex angulis triangulorum ADB, ADC simul sumtis (*Syn Alg.* §. 256.) Hi autem sex anguli valent quatuor rectos (*Lib. V.* §. 40.). Ergo quatuor itidem anguli ACD, CDB, DBA, BAD sunt quatuor rectis æquales (*Syn. Alg.* §. 262.). Quatuor itaque anguli &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Omnes anguli quadrati, & quadrilateri oblongi sunt recti.

14. Cum enim omnes anguli tam quadrati, quam quadrilateri, quod dicitur *altera parte longius*, æquales sint inter se (§. 2. & 4.); omnesque simul sumti valeant quatuor rectos, eorum quilibet necessario erit rectus.

COROLLARIUM II.

Altitudo quadrati, & quadrilateri oblongi coincidit cum uno suorum laterum.

15. Altitudo nimirum quadrati ABDC erit ipsius latus CD, vel AB.
Fig. 7. Enimvero cum uterque angulus CDB, ABD sit rectus (§. 14.), utrumque
Fig. 8. latus CD, AB ad perpendiculum basi BD insistit (*Lib. III.* §. 24.); atque
Tab. II. adeo pro illius altitudine sumi potest (*Lib. IV.* §. 14.). Idipsum dicito de altitudine quadrilateri oblongi ABCD.

COROLLARIUM III.

Quatuor anguli unius quadrilateri, si sumantur simul, æquales sunt quatuor angulis alterius quadrilateri simul itidem sumtis.

Fig. 9. Fig. 10. Tab. II. 16. Videlicet quatuor anguli quadrilateri ABCD simul sumti, æquales sunt quatuor angulis simul itidem sumtis quadrilateri ABCD. Sunt enim tam

tam illi, quam isti quatuor rectis æquales (§. 13.), & quæ eidem æqualia sunt, inter se pariter sunt æqualia (*Syn. Alg. §. 259.*).

COROLLARIUM IV.

Si tres anguli unius quadrilateri æquales fuerint tribus angulis alterius quadrilateri, etiam reliquus erit reliquo æqualis.

17. Quandoquidem si æqualibus æqualia demantur, quæ remanent, sunt æqualia (*Ibid. §. 266.*).

COROLLARIUM V.

Omnia quadrata sunt inter se mutuo æquiangula.

18. Cum enim anguli omnium quadratorum sint recti (§. 14.), & omnes anguli recti sint inter se æquales (*Lib. III. §. 37.*), omnia quadrata erunt inter se mutuo æquiangula (*Lib. V. §. 19.*).

THEOREMA II.

Omnis parallelogrammi qui ex adverso consistunt anguli, & latera, sunt inter se æqualia.

Quadrilaterum ABCD sit parallelogrammum, habeat nimirum opposita latera AB, CD, sicuti etiam AD, BC, sibi mutuo parallela. Fig. 10. Tab. II.

I.

19 Dico primo, oppositos ipsius angulos BAD, BCD, quemadmodum etiam ABC, ADC esse inter se æquales.

Demonstratio.

Cum enim latera AD, BC sint parallela, duo anguli DAB, ABC æquales erunt duobus rectis (*Lib. IV. §. 13.*). Eandem ob causam duobus rectis æquales erunt etiam duo BAD, ADC; cum duo quoque latera AB, DC sint sibi mutuo parallela. Duo igitur anguli DAB, ABC æquales sunt duobus BAD, ADC (*Syn. Alg. §. 259.*). Quamobrem sublato communi BAD, erit reliquus ABC reliquo ADC æqualis (*ibid. §. 266.*). Eodem modo ostendam, etiam duos BAD, BCD esse æquales; adeoque &c.

II.

20. Dico secundo, opposita latera AB, CD, sicuti etiam AC, BD parallelogrammi ACDB esse inter se æqualia. Fig. 3. Tab. II.

Demonstratio.

Ducta diagonali AD, anguli alterni tam BAD, ADC producti ab ipsa diagonali AD, quatenus incidit in rectas parallelas AB, CD, quam ADB, DAC, qui fiunt ab eadem incidente in rectas parallelas BD, AC erunt æquales (*Lib. IV.* §. 15.). Duo ergo triangula ADB, ADC habent duos angulos BAD, BDA duobus angulis CDA, CAD æquales, alterum alteri, qui communi lateri adjacent AD. Ergo æqualia itidem, erunt ipsorum latera, quæ æqualibus angulis adversantur, erit nempe latus AB æquale lateri CD, & latus BD lateri AC (*Lib. V.* §. 92.). Itaque omnis parallelogrammi, qui ex adverso consistunt &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Diagonalis parallelogrammi ipsum dividit in duo triangula æqualia.

21. Æqualia nempe sunt duo triangula ADB, ADC, in quæ parallelogrammum ACDB dividitur a sua diagonali AD. Cum enim latus AB
Fig. 3. Tab I. æquale sit lateri CD, latus BD lateri AC, & latus AD sit commune utrique triangulo ADB, ADC, duo triangula ADB, ADC erunt inter se mutuo æquilatera (*Ibid.* §. 18.). Ergo erunt quoque inter se mutuo æqualia (*Ibid.* §. 84.).

COROLLARIUM II.

Si unus angulus parallelogrammi rectus fuerit, omnes ipsius anguli erunt recti.

22. Ut si angulus parallelogrammi ABCD fuerit rectus, reliqui similiter ipsius anguli BCD, CDA, DAB erunt recti. Enimvero si angulus ABC
Fig. 8. Tab.II. est rectus, rectus quoque erit etiam angulus illi oppositus ADC, utpote ipsi ABC æqualis (§. 19.). Quatuor autem anguli ABC, BCD, CDA, DAC æquales sunt quatuor rectis (§. 13.). Ergo etiam duo DAB, BCD erunt duobus rectis æquales. Duo autem anguli DAB, BCD æquales sunt inter se (§. 19.). Ergo uterque erit rectus.

COROLLARIUM III.

Rectæ parallelæ, quæ inter duas rectas parallelas continentur, sunt inter se æquales.

23. Si nimirum rectæ AH, GK, quæ inter rectas parallelas AB, CD
Fig. 11. Tab.II. continentur, fuerint parallelæ, erunt etiam inter se æquales. Enimvero cum facta hac hypothesi, quadrilaterum HKGA sit parallelogrammum (§. 8.),

(§. 8.), opposita ipsius latera erunt æqualia (§. 20.). Igitur recta AH rectæ GK æqualis erit; adeoque &c.

THEOREMA III.

Recta linea bifariam dividens opposita parallelogrammi latera, illius quoque diametrum dividit bifariam, & vicissim bifariam a diametro dividitur.

24. Recta EG bifariam dividat opposita latera AB, DC parallelogrammi ABCD. Dico, bifariam quoque dividere ipsius parallelogrammi diagonalem AC, & vicissim ab ipsa diagonali AC bifariam dividi. Fig. 12. Tab. II.

Demonstratio.

Cum enim opposita latera AB, DC parallelogrammi ABCD sint æqualia (*Ibid.*), eorum quoque dimidia erunt æqualia (*Lib. I. §.* 126.). Segmentum itaque GC æquale erit segmento AE. Quoniam vero latera AB, DC sunt parallela, atque in ea incidit recta AC, anguli alterni BAC, ACD erunt æquales (*Lib. IV. §.* 15.); sicuti etiam eandem ob causam æquales erunt duo AEG, EGC, utpote similiter alterni, producti a recta incidente EG. Itaque duo triangula AEF, GFC habent duos angulos FAE, AEF duobus angulis FCG, FGC æquales, alterum alteri. Habent autem etiam latera AE, GC æqualia, quibus æquales anguli adjacent. Ergo reliqua similiter latera unius æqualia erunt reliquis lateribus alterius, alterum alteri, quæ æqualibus *respective* angulis adversantur, erit nempe latus AF æquale lateri FC, & latus EF lateri FG (*Lib. V. §.* 92.). Recta igitur EG bifariam dividit diagonalem AC, & vicissim ab ipsa diagonali AC bifariam dividitur; ac proinde recta bifariam dividens opposita parallelogrammi latera &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Recta linea oblique incidens in plures rectas parallelas, quæ æqualia inter se mutuo intervalla habeant, in partes æquales ab ipsis rectis parallelis tota dividitur.

25. Ut si recta KL oblique inciderit in rectas parallelas AB, CD, EF, GH æqualia intervalla habentes, æquales erunt partes KS, ST, TL, in quas ab illis dividitur. Eductis namque ex punctis K, T rectis KN, TR, quæ ad perpendiculum insistant rectæ AB, atque adeo etiam reliquis CD, EF (*Lib. IV. §.* 16.), cum duo anguli KNT, RTN sint recti (*Lib. III. §.* 23.), duæ KN, RT erunt parallelæ (*Lib. IV. §.* 13.); ac proinde quadrilaterum KNTR erit parallelogrammum (§. 8.). Cumque perpendicula KM, MN, RQ; QT per hypothesim sint inter se æqualia, recta MQ bifariam Fig. 13. Tab. II.

 gram-

divideт opposita latera KN, RT parallelogrammi KNTR, adeoque etiam rectam KT (§. 24.), quæ est diagonalis, ut patet, parallelogrammi KNTR. Partes igitur KS, ST rectæ oblique incidentis KL sunt æquales. Eodem modo ostendam, partes quoque ST, TL esse æquales. Æquales ergo erunt omnes partes KS, ST, TL rectæ oblique incidentis KL a rectis parallelis AB, CD, EF, GH æqualia intervalla habentibus determinatæ; adeoque &c.

COROLLARIUM II.

Rectæ parallelæ oblique incidentes in plures rectas parallelas æqualia intervalla habentes, in partes æquales dividuntur.

26. Ut si in rectas parallelas AB, CD, EF æqualia intervalla habentes oblique incidant rectæ parallelæ AL, GM, partes ipsarum HA, HL, GK, KM, in quas ab illis dividuntur, erunt inter se æquales. Quandoquidem pars AH æqualis est pari GK (§. 23.). Est autem GK æqualis parti KM (§. 25.). Ergo pars quoque AH partem KM æquabit (*Syn. Alg.* §. 259.). Cumque pars KL partem AH adæquet (§. 25.), partibus itidem GK, KM æqualis erit (*Syn. Alg.* §. 261.); eruntque propterea omnes AH, HL, GK, KM inter se æquales; ac proinde &c.

Fig. 11. Tab. II.

SCHOLION.

27. In utroque *corollario* positum est, lineas oblique in parallelas incidere. Quippe si incidentia fuerit ad perpendiculum, utrumque *corollarium* patet ex sola *Definitione XI. hujus libri*. Etenim si ponatur recta RT incidere ad perpendiculum in rectas AB, CD, EF, cum recta RT nequeat uni illarum ad perpendiculum incumbere, quin ceteris quoque perpendicularis existat (*Lib. IV.* §. 16.), ipsius partes RQ, QT erunt perpendicula, quibus ipsarum parallelarum intervalla determinantur. Quamobrem ex *Definit. laudata* segmenta RQ, QT erunt æqualia. Similiter si duæ parallelæ KN, RT ad perpendiculum incidant, segmenta perpendicularia KM, RQ erunt æqualia, sicuti etiam segmenta MN, QT. Æqualia autem sunt duo RQ, QT, ut modo vidimus. Ergo utrumque KM, MN utrique RQ, QT æquale erit, sive quod perinde est, quatuor partes KM, MN, RQ, QT erunt inter se æquales.

Fig. 13. Tab. II.

THEO-

THEOREMA IV.

Omne quadrilaterum habens duo opposita latera æqualia, vel oppositos angulos inter se æquales, est parallelogrammum.

I.

28. Quadrilaterum ACDB habeat duo opposita latera AB, CD, ficuti etiam duo AC, BD inter se æqualia. Dico, hujusmodi quadrilaterum esse parallelogrammum. Fig. 9. Tab. II.

Demonstratio.

Cum latus AB sit ex hypothesi æquale lateri CD, latus AD sit commune utrique triangulo ADB, ADC, & basis BD unius basim AC alterius itidem ex hypothesi adæquet, angulus BAD, angulo ADC æqualis erit (*Lib. V. §.* 82.). Sunt autem alterni producti a recta, sive diagonali AD, incidente in rectas AB, CD, ut patet. Ergo duæ AB, CD erunt parallelæ (*Lib. IV. §.* 12.). Sunt autem etiam æquales, junguntur que rectis AC, BD. Ergo etiam duæ AC, BD parallelæ erunt (*Lib. V. §.* 88.), adeoque &c.

II.

29. In quadrilatero ABCD sint anguli ex adverso æquales, angulus nimirum ABC angulum ADC, & angulus BAD angulum BCD adæquet. Dico, quadrilaterum ABCD esse parallelogrammum.

Demonstratio.

Quoniam ex hypothesi angulus ABC æqualis est angulo ADC, & angulus BAD angulo BCD, erunt duo BAD, ADC æquales duobus ABC, BCD, & duo BAD, ABC duobus BCD, CDA, ut patet. Sunt autem quatuor anguli ABC, ADC, BAD, BCD simul sumti æquales quatuor rectis (*Lib. VI. §.* 13.). Ergo tam duo BAD, ADC, quam duo BAD, ABC duobus rectis æquales erunt. Quamobrem cum tam illi, quam isti sint interni ad easdem partes, duæ rectæ AB, DC, quemadmodum etiam duæ rectæ AD, BC, erunt inter se parallelæ (*Lib. IV. §.* 9.). Igitur omne quadrilaterum &c. quod erat ostendendum. Fig. 10. Tab. II.

COROLLARIUM.

Quadratum, altera parte longius, rhombus, & rhomboides sunt parallelogramma.

30. Hujusmodi namque figuræ quadrilateræ habent opposita latera æqualia, quemadmodum etiam angulos, qui sunt ex adverso, æquales, ut ex earum *definitionibus* constat (§. 2. & *seq.*). Ergo &c.

THEOREMA V.

Parallelogramma super eadem basi, & in iisdem rectis parallelis constituta, sunt inter se æqualia.

31. Super eadem basi CD, & in iisdem parallelis AF, CD constituta habeantur duo parallelogramma ACDB, ECDF. Dico, ea esse inter se æqualia.

Demonstratio.

Cum enim duo latera AB, CD parallelogrammi ACDB æqualia sint inter se, quemadmodum etiam duo EF, CD parallelogrammi ECDF (§.20.),
Fig.14. Tab.II. æqualia erunt inter se duo AB, EF (*Syn. Alg.* §. 259.), utpote eidem CD æqualia. Quamobrem si utrique addatur segmentum BE, erit totum AE toti BF æquale (*ibid.* §.265.). Est autem latus quoque AC lateri BD æquale (§. 20.), & angulus DBE angulo CAB (*Lib. IV.* §. 14.); cum duo latera AC, BD ex hypothesi sint parallela. Igitur duo triangula AEC, BDF habent latera AE, BF, sicuti etiam AC, BD, æqualia, nec non angulos EAC, FBD, qui æqualibus lateribus continentur, æquales. Ergo basis quoque CE basi DF æqualis erit, totumque triangulum AEC erit toti triangulo BDF æquale (*Lib. V.* §. 74.). Sublato propterea communi triangulo BGE, trapezium ACGB erit æquale trapezio EGDF (*Syn. Alg.* §. 266.). Quocirca, si utrique trapezio addatur triangulum CGD, parallelogrammum ACDB æquale erit parallelogrammo ECDF (*ibid.* §. 265.). Parallelogramma ergo super eadem basi &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Triangula super eadem basi, & in iisdem rectis parallelis constituta, sunt inter se æqualia.

32. Triangula nimirum AEC, AFC super eadem basi AC, & in iisdem
Fig. 15. Tab.II. rectis parallelis AC, EF constituta, sunt inter se æqualia. Erectis namque super basi AC parallelogrammis AEBC, ADFC, hæc erunt *per hoc theorema* inter se æqualia. Est autem triangulum AEC medietas parallelogrammi

mi AEBC; & triangulum AFC medietas parallelogrammi ADFC (§. 21). Ergo duo ipsa triangula AEC, AFC sunt inter se æqualia (*Lib.* I. §. 126.).

COROLLARIUM II.

Si parallelogrammum, & triangulum eandem habuerint basim, & in iisdem fuerint rectis parallelis constituta, erit parallelogrammum duplum trianguli.

33. Parallelogrammum scilicet AEBC duplum erit trianguli AFC eandem habentis basim AC, in iisdemque rectis parallelis EF, AC constituti. Etenim ducta diagonali EC, duo triangula AEC, AFC erunt æqualia (§. 32.). Est autem parallelogrammum AEBC duplum trianguli AEC (§. 21.). Ergo duplum quoque erit trianguli AFC (*Lib.* I. §. 112.), adeoque &c. Fig. 15. Tab. II.

THEOREMA VI.

Parallelogramma super æquales bases, & in iisdem rectis parallelis constituta, sunt inter se æqualia.

34. Super æquales bases BC, FG, & in iisdem rectis parallelis, AH, BG constituta habeantur duo parallelogramma ABCD, EFGH. Dico, ea esse inter se æqualia.

Demonstratio.

Extrema rectarum BC, EH jungantur rectis EB, HC. Cum ergo recta EH æqualis sit rectæ FG (§. 20.), ipsa EH rectæ quoque BC, quam recta FG ex hypothesi adæquat, æqualis erit (*Syn. Alg.* §. 262.). Sunt autem duæ BC, EH parallelæ. Ergo parallelæ quoque erunt duæ BE, CH (*Lib.* V. §. 88.), eritque proinde quadrilaterum EBCH parallelogrammum (§ 8.). Est autem parallelogrammum ABCD, quemadmodum etiam parallelogrammum EFGH, æquale parallelogrammo EBCH (§. 31.). Ergo duo parallelogramma &c. quod erat ostendendum. Fig. 16. Tab. II.

COROLLARIUM I.

Triangula super æquales bases, & in iisdem rectis parallelis constituta, sunt inter se æqualia.

35. Triangula nimirum BAC, FEG super æquales bases, BC, FG, & in iisdem rectis parallelis AH, BG constituta, sunt inter se æqualia. Est enim triangulum BAC medietas parallelogrammi ABCD, & triangulum FEG medietas parallelogrammi EFGH (§. 31.). Quamobrem cum, ut modo ostensum est, hujusmodi parallelogramma sint inter se æqualia, ipsa

quoque triangula BAC, FEG inter se æqualia erunt (*Lib.I.§.116.*); adeoque &c.

COROLLARIUM II.

Si parallelogrammum, & triangulum æqualem habuerint basim, & fuerint inter easdem rectas parallelas constituta, erit parallelogrammum duplum trianguli.

36. Parallelogrammum scilicet ABCD duplum erit trianguli FEG habentis basim FG æqualem basi BC, in iisdemque rectis parallelis AH, BG constituti. Ducta namque diagonali AC in parallelogrammo ABCD, parallelogrammum ABCD duplum erit trianguli BAC (§. 21.). Est autem triangulum FEG æquale triangulo BAC (§. 35.). Ergo parallelogrammum ABCD duplum quoque erit trianguli FEG (*Lib.I.§. 112.*).

Fig.16. Tab.II.

THEOREMA VII.

In omni triangulo rectangulo quadratum hypotenusæ est æquale quadratis laterum simul sumtis.

37. Esto triangulum rectangulum BAC. Super singula autem ipsius latera AB, BC, CA constituta habeantur quadrata. Dico, quadratum BDEC hypotenusæ BC æquale esse quadratis BFGA, ACKH laterum BA, AC simul sumtis.

Demonstratio.

Ab angulo recto BAC ipsius trianguli ducatur ad basim DE quadrati BE recta AL, quæ sit parallela lateribus BD, CE ejusdem quadrati, junganturque puncta F, C recta FC, & puncta A, D recta AD (*Lib.III.§. 29.*). Quoniam igitur quadrilatera GB, BF sunt quadrata, latera FB, BA erunt æqualia, sicuti etiam latera BC, BD (§. 2.); duoque proinde triangula FCB, ADB habebunt duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri. Habent autem & angulos FBC, ABD, qui æqualibus lateribus continentur, æquales. Cum enim duo anguli, FBA, CBD sint æquales, utpote recti (§. 14.), si utrique addatur angulus ABC, erit totus FBC toti ABD æqualis (*Syn.Alg. §. 185.*). Ergo triangulum FCB triangulo BAD æquale erit (*Lib.V.§.74.*). Rursus cum duo anguli GAB, BAC sint recti, duæ rectæ lineæ GA, AC erunt in directum positæ (*Lib.III. §. 49.*); eritque propterea tota GC parallela rectæ FB; cum GA sit ipsi FB parallela (§ 30.). Sunt igitur quadratum GB, & triangulum FCB super eadem recta FB, & in iisdem rectis parallelis GC, FB constituta. Quamobrem erit quadratum GB duplum trianguli FCB (§. 33.). Eandem ob causam parallelogrammum BOLD duplum erit trianguli BAD; cum eadem sit utriusque basis BD, in iisdemque rectis parallelis AL, BD sint constitutæ. Ergo, sicuti

Fig.17. Tab.II.

cuti duo triangula FCB, BAD æqualia sunt inter se, parallelogrammum quoque BOLD quadrato FGAB æquale erit (*Lib. I. §.* 103.). Eodem modo demonstrabitur parallelogrammum OLEC æquale quadrato AHKC. Ergo totum quadratum BDEC æquale erit duobus quadratis FBAG, ACKH simul sumtis. In omni ergo triangulo &c. quod erat ostendendum.

S C H O L I O N.

38. Hujus theorematis eximius per universam Mathesim usus est. Illius inventio Pythagoræ accepta refertur, qui, ut alibi etiam ex Laertio notavimus, Musis victimas immolavit, quod in tam præclaro invento ab illis se adjutum putaret.

COROLLARIUM.

Quadratum diagonalis cujuslibet quadrati est duplum quadrati singulorum laterum ejusdem quadrati.

39. Ducta nimirum in quadrato ADCB diagonali AC, erectisque super eam, necnon super latera AB, BC quadratis AE, AF, CG, quadratum AE diagonalis AC duplum erit tum quadrati AF lateris AB, tum quadrati CG Fig. 18.
lateris BC. Etenim cum angulus ABC sit rectus (§. 14.), triangulum ABC Tab. II.
erit rectangulum (*Lib. V. §.* 29.); ac proinde quadratum AE hypotenusæ AC æquale erit quadratis AF, CG laterum AB, BC simul unitis (§. 37.). Duo autem quadrata AF, CG sunt inter se æqualia (*Lib. I. §.* 187.). Ergo quadratum AE duplum erit tum quadrati AF, tum quadrati CG; adeoque &c.

THEOREMA XVI.

Omnis figura plana rectilinea resolvi potest in tot triangula plana rectilinea, quot habet latera.

40. Esto hexagonum ACE. Dico, ipsum resolvi posse in sex triangula plana rectilinea, quemadmodum sex sunt ipsius latera.

Demonstratio.

Sumto in illius area quovis puncto G, ducantur ex illo id apices angulorum A, B, C, D, E, F, quos hexagonum ipsum continet, rectæ GA, GB, GC, GD, GE, GF. Perspicuum est, tot hinc facta esse triangula, Fig. 22.
quot sunt ipsius hexagoni latera. Horum autem triangulorum areæ simul Tab. II.
sumtæ aream dati hexagoni adæquant (*Syn. Alg. §.* 256.). Ergo divisum erit in tot triangula, quot sunt ipsius latera. Ita que omnis figura &c. quod erat ostendendum.

THEO-

THEOREMA IX.

Anguli interni cujusvis polygoni simul sumti conficiunt summam tot rectorum, quot sunt ipsius latera bis sumta, demtis quatuor.

41. Esto polygonum sex laterum ABF. Dico, internos ipsius angulos,
Fig.22. Tab.II. si simul sumantur, conficere summam octo rectorum, tot nimirum, quot sunt ipsius latera bis sumta, demtis quatuor.

Demonstratio.

Sumto in illius area puncto G, ductisque ad apices angulorum ipsius hexagoni rectis GA, GB, GC, GD, GE, GF, divisum erit hexagonum in sex triangula, quorum anguli ad basim simul sumti æquales erunt angulis ipsius hexagoni, si ipsi quoque simul sumantur; ac proinde anguli ipsius hexagoni æquales erunt tot rectis, quot rectis æquales sunt anguli, qui ad basim illorum triangulorum reperiuntur (*Syn. Alg.* §. 262.). Hujusmodi autem anguli simul sumti summam conficiunt tot rectorum, quot sunt hexagoni latera bis sumta, demtis quatuor, videlicet octo rectorum. Quandoquidem cum tres anguli cujuslibet trianguli valeant duos rectos (*Lib. V.* §. 40.), omnes anguli omnium triangulorum, in quæ divisum est hexagonum ACE simul sumti, duodecim rectis æquales erunt. Quamobrem, cum, qui circa punctum G reperiuntur, anguli valeant quatuor rectos (*Lib.* III. §. 44.), anguli, qui sunt ad bases ipsorum triangulorum, sive omnes anguli dati hexagoni ACE, octo rectis æquales erunt. Eodem modo ratiocinare de aliis quibuscumque polygonis. Anguli ergo cujuslibet polygoni &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Omnes anguli interni unius polygoni simul sumti, æquales sunt omnibus angulis internis simul itidem sumtis alterius polygoni ejusdem generis.

42. Anguli nimirum unius pentagoni simul sumti æquales sunt angulis alterius pentagoni simul itidem sumtis. Utriusque enim anguli valent tot rectos, quot sunt ipsorum latera duplata, demtis quatuor.

COROLLARIUM II.

Si numerus angulorum rectorum, quos adæquant omnes anguli polygoni regularis simul sumti, dividatur per numerum laterum ejusdem, quotus erit valor cujuslibet anguli ipsius polygoni.

43. Ut si numerus rectorum angulorum, quibus æquales sunt omnes anguli

guli dati polygoni regularis, fuerit $= m$, & numerus laterum ponatur $= n$.

Fuerit autem $\frac{m}{n} = p$, quotus p erit valor cujuslibet anguli ipsius polygoni. Cum enim summa omnium angulorum adæquet tot rectos, quot designat quantitas m, & omnes illi anguli sint inter se æquales (*Lib. V. §. 20.*), totque sint anguli in quolibet polygono, quot in eo sunt latera, consectarium est, ut quilibet illorum angulorum, sit æqualis summæ m per numerum laterum divisæ, scilicet quotienti p.

COROLLARIUM III.

Ex omnibus figuris rectilineis sola triangula æquilatera, quadrata, & hexagona regularia, si penes latera simul respective jungantur, replent spatium, quod est circa idem punctum in eodem plano.

44. Nimirum sex triangula æquilatera, quatuor quadrata, & tria hexagona regularia, si jungantur penes latera, replere possunt spatium, quod est circa idem punctum in eodem plano, & præter hæc, nulla alia est figura, quæ aliquoties sumta id præstare queat. Primum patet; quia quilibet angulus trianguli regularis adæquat tertiam partem duorum rectorum (*Lib. V. §. 43.*), adeoque sextam partem quatuor rectorum. Quilibet angulus quadrati est rectus (§. 14.); & quilibet angulus hexagoni regularis valet unum rectum, & unam insuper tertiam partem unius recti (§. 43.). Alterum quoque manifestum fiet inductione. Constabit enim, si valor cujuslibet anguli ceterarum figurarum expendatur, earum angulos simul junctos vel summam excedere quatuor rectorum, vel ab illa deficere (a).

COROLLARIUM IV.

Omnes figuræ rectilineæ regulares ejusdem generis sunt inter se mutuo æquiangulæ.

45. Omnis enim angulus trianguli regularis valet tertiam partem duorum rectorum (*Lib. V. §* 43.). Omnis angulus quadrati, quod solum inter quadrilatera est figura regularis, rectus est (§. 14.). Et omnis angulus polygoni regularis ejusdem generis est æqualis numero rectorum, quos omnes illius anguli simul sumti adæquant, per numerum laterum diviso (§. 43.).

THEOREMA XI.

Anguli externi cujuslibet figuræ rectilineæ æquales sunt quatuor rectis.

46. Latera hexagoni ACE directe ad easdem partes producantur, videlicet

(a) Videatur Pappus Præf. in lib. 5 *Collect. Mathem.* & Proclus in Coroll. prop. 15. lib. I. Euclidis.

licet latus FA in *b*, latus AB in *c*, latus BC in *d*, latus CD in *e*, latus
Fig.22. Tab.II. DE in *f*, & latus EF in *a*. Dico, angulos externos *b*AB, *c*BC, *d*CD, *e*DE, *f*EF, *a*FA simul sumtos conficere summam quatuor angulorum rectorum.

Demonstratio.

Cum enim duo quilibet anguli externus *b*AB, & internus deinceps positus FAB, valeant duos rectos (*Lib. III.* §. 40.), anguli interni, & externi hexagoni ACE simul sumti erunt æquales duodecim rectis, nempe bis tot rectis, quot sunt ipsius hexagoni latera. Constat autem, angulos internos, simul cum iis, qui fiunt circa punctum G, æquales itidem esse duodecim rectis (§. 41.). Ergo anguli interni simul cum externis æquales erunt angulis internis sumtis cum iis, qui sunt circa punctum G (*Syn. Alg.* § 359.). Quamobrem sublatis internis, erunt externi æquales iis, qui circa punctum G constitui possunt (*Ibid.* §. 266.). Hi autem valent quatuor rectos (*Lib. III* §. 44.). Ergo anguli quoque externi quatuor rectis æquales erunt (*Syn. Alg.* §. 262.). Itaque anguli externi &c. quod erat ostendendum.

C O R O L L A R I U M.

Anguli externi unius figuræ rectilineæ simul sumti, sunt æquales angulis externis itidem simul sumtis alterius cujuslibet figuræ rectilineæ.

47. Cum enim omnes sint æquales quatuor rectis (§. 46.), omnes anguli externi unius figuræ planæ rectilineæ omnibus angulis externis alterius æquales erunt (*Syn. Alg.* §. 259.).

A P P E N D I X.

De lineis incommensurabilibus.

D E F I N I T I O I.

48. *Magnitudines commensurabiles dicuntur illæ, quibus datur communis mensura, seu quæ sunt hujusmodi, ut una eademque magnitudo eas exacte metiri possit.* Tales sunt linea *bipalmaris*, & linea *tripalmaris*. Utramque enim *palmaris* linea adæquate metitur.

C O R O L L A R I U M.

49. *Magnitudines commensurabiles sunt inter se, ut numerus vulgaris integer, vel fractus ad numerum vulgarem integrum, vel fractum.* Et vicissim *magnitudines, quarum una est ad aliam, ut numerus vulgaris integer, vel fractus ad numerum vulgarem integrum, vel fractum, sunt inter se commen-*

menſurabiles. Numeri enim vulgares integri habent unitatem pro menſura communi, & numeri vulgares fracti eandem unitatis particulam, ſi ad idem nomen reducantur.

DEFINITIO II.

50. *Illæ vero magnitudines incommenſurabiles vocantur, quibus nulla eſt menſura communis, ſive pars, quæ eas omnes adæquate metiatur.*

COROLLARIUM.

51. *Illæ magnitudines ſunt inter ſe incommenſurabiles, quarum una non eſt ad aliam, ut numerus vulgaris integer, vel fractus ad numerum vulgarem integrum, vel fractum.* Hoc enim ipſo magnitudines illæ ſunt hujuſmodi, ut nulla pars aliquota illis communis inveniri queat.

LEMMA I.

Quadrata magnitudinum commenſurabilium ſunt inter ſe, ut numerus quadratus ad numerum quadratum.

52. Sint duæ magnitudines commenſurabiles a, b. Dico, ipſarum quadrata aa, bb eſſe directe inter ſe, ut numerus quadratus ad numerum quadratum.

Demonſtratio.

Cum enim magnitudines a, b ſint, ut numerus ad numerum (§. 49.); ponatur $a.\,b = 4.\,3$. Igitur erit quoque $aa.\,bb = 16.\,9$ ((*Lib. I. §.* 188.)); adeoque &c.

LEMMA II.

Illæ magnitudines, quarum quadrata ſunt inter ſe, ut numerus quadratus ad numerum quadratum, ſunt inter ſe commenſurabiles.

53. Sint duæ magnitudines a, b, quarum quadrata aa, bb ſint directe inter ſe, ut numerus quadratus 16 ad numerum quadratum 9. Dico, magnitudines a, b eſſe *commenſurabiles*.

Demonſtratio.

Enimvero, cum per hypotheſim habeatur $aa.\,bb = 16.\,9$, horum quoque terminorum radices quadratæ a, b, 4, 3 erunt proportionales, erit nempe $a.\,b = 4.\,3$ (*ibid.*). Ergo duæ magnitudines a, b erunt inter ſe *commenſurabiles* (§. 49.); adeoque &c.

LEM-

LEMMA III.

Quadrata magnitudinum incommensurabilium non sunt inter se, ut numerus quadratus ad numerum quadratum.

54. Sint duæ magnitudines *incommensurabiles* a, b. Dico, earum quadrata aa, bb non esse inter se, ut numerus quadratus ad numerum quadratum.

Demonstratio.

Si enim quadratum aa esset ad quadratum bb, ut numerus quadratus ad numerum quadratum, radices a, b essent inter se *commensurabiles* (§. 53.) Ergo &c.

LEMMA IV.

Illæ magnitudines sunt incommensurabiles, quarum quadrata non sunt inter se, ut numerus quadratus ad numerum quadratum.

55. Quadrata aa, bb magnitudinum a, b non sint inter se, ut numerus quadratus ad numerum quadratum. Dico, magnitudines a, b esse *incommensurabiles*.

Demonstratio.

Magnitudines namque a, b non possunt esse *commensurabiles*, nisi earum quadrata aa, bb sint inter se, ut numerus quadratus ad numerum quadratum (§. 52.). Ergo &c.

LEMMA V.

Nullus numerus quadratus potest esse duplus alterius numeri quadrati.

56. Esto numerus quadratus a. Dico, nullum inveniri posse numerum quadratum, cujus numerus ipse a sit duplus.

Demonstratio.

Sumtis namque in ratione *dupla* quotcunque numeris ab unitate, videlicet 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. tertius dumtaxat ab unitate est quadratus, & ceteri omnes unum intermittentes (*Lib.* II. §. 29.). Ergo nullus numerus quadratus potest esse duplus alterius numeri quadrati.

THEO-

THEOREMA UNICUM.

Diagonalis quadrati est incommensurabilis lateribus ipsius quadrati.

57. Esto quadratum ADCB, ejusque diagonalis AC. Dico, rectam AC esse *incommensurabilem* lateri AB ipsius quadrati.

Demonstratio.

Quadratum AEC diagonalis AC est duplum quadrati AFB lateris AB ipsius quadrati (§. 39.). Nullus autem numerus quadratus potest esse duplus alterius numeri quadrati (§. 56.). Ergo quadratum AEC diagonalis AC non est ad quadratum AFB lateris AB, ut numerus quadratus ad numerum quadratum. Illæ autem magnitudines sunt inter se *incommensurabiles*, quarum quadrata non sunt, ut numerus quadratus ad numerum quadratum (§. 55.). Ergo diagonalis AC est *incommensurabilis* lateri AB, eademque ratione reliquis lateribus quadrati ADCB. Itaque diagonalis &c. quod erat ostendendum. Fig. 18. Tab. II.

SCHOLION.

58. Verum ut id evidentius fiat, ponamus, diagonalem dati quadrati esse rectam GH, ejusdem vero latus rectam CD. Si ergo hujusmodi rectæ sunt inter se *commensurabiles*, communis earum mensura sit pars GO, sintque propterea in diagonali GH *sex* partes ipsi GO æquales; *quinque* vero in latere CD. Igitur quadratum EGHF diagonalis GH continebit 36. parva quadrata æqualia quadrato GP communis mensuræ GO. At quadratum ACDB lateris CD nonnisi 25. ex hisce parvis quadratis, ut patet, comprehendet. Quadratum ergo EGHF non erit duplum quadrati ACDB. Quamobrem, ut sit duplum, non potest latus CD *quinque* ex illis partibus comprehendere, ex quibus *sex* in diagonali GH continentur. Ponamus idcirco, *quatuor* dumtaxat ex illis partibus in recta, sive latere MN dati quadrati reperiri. Igitur quadratum KMNL 16 quadrata dumtaxat, quorum singula quadrata GP æqualia sint, complectetur; ac proinde quadratum EGHF diagonalis GH, neque in hoc casu duplum erit quadrati KMNL lateris MN. Ut igitur quadratum diagonalis GH sit duplum quadrati lateris dati quadrati, debet latus ipsum continere minus quam *quinque* ex illis partibus, ex quibus *sex* habentur in ipsa diagonali GH, plus vero quam *quatuor*. Verum cum demonstratio robur habeat, quicumque sit numerus partium aliquotarum, in quas divisa ponatur diagonalis GH, perspicuum remanet, diagonalem, atque latus quadrati esse lineas illius indolis, ut nulla assignari queat pars, quæ eas omnes adæquate metiatur. Fig. 19. Fig. 20. Tab. II. Fig. 21. Tab. II.

ELE-

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM

LIBER VII.

De circulo.

C*irculus* figuris omnibus planis nobilior eſt, tantæque præſtantiæ, ut Ariſtoteles *admirandorum omnium*, quæ in natura fiunt, *principium*, *& cauſam* illum dixerit. Eximias itaque *circuli* affectiones hoc libro complectemur, & demonſtrabimus.

DEFINITIO I.

1. C*irculus eſt figura plana ſub una tantum curva linea comprehenſa, in cujus area punctum eſt, a quo omnes rectæ ductæ in illam curvam*
Fig. 23. Tab.II. *lineam, ſunt inter ſe æquales*. Hujuſmodi eſt figura ABCD curva linea ABCD undique terminata. Æquales namque ſunt omnes rectæ EA, EB, EC, ED, ceteræque omnes, quæ a puncto E in illam curvam ABCD cadere poſſunt.

DEFINITIO II.

2. *Circumferentia circuli*, quæ illius etiam *peripheria* dici ſolet, *eſt illa*
Fig. 25. Tab.II. *curva linea, qua circulus undique clauditur*. Sic linea curva ABCD eſt *circumferentia*, & *peripheria* circuli ABCD.

DEFINITIO III.

3. *Centrum circuli eſt punctum in illius area ſumtum, a quo omnes rectæ lineæ, quæ in illius peripheriam cadunt, ſunt inter ſe æquales*. Tale eſt punctum E in circulo ABCD; cum æquales ſint rectæ EA, EB, EC, ED, quæ ab eo ductæ ſunt in peripheriam ABCD.

COROLLARIUM I.

4. *Singula puncta peripheriæ circuli æqualiter diſtant ab illius centro*. Æquales enim ſunt rectæ, quæ illorum omnium diſtantiam metiuntur.

Co-

Corollarium II.

5. *Centrum circuli in illius medio positum est*. Definiri propterea etiam solet: *punctum in medio circuli constitutum*.

Corollarium III.

6. *Æquales ejusdem circuli arcus sibi mutuo congruunt*. Quippe, si secus, non omnia ipsorum puncta æque distarent a centro, sed magis, illa, quæ extra alterum ipsorum arcuum caderent.

Definitio IV.

7. *Diameter circuli est recta quæcumque linea ducta per centrum ipsius circuli, & utrinque ad illius peripheriam terminata*. Hujusmodi sunt in circulo ABCD duæ rectæ BD, AC. Transeunt enim per illius centrum E, & in illius peripheriam desinunt. Fig.25. Tab.II.

Corollarium.

8. *Omnis diameter circuli totum ipsum circulum, ejusque peripheriam bifariam dividit*. Transit enim per punctum, quod in illius medio positum est (§. 5.), quodque a singulis punctis peripheriæ ipsius circuli æqualiter distat (§. 4.).

Definitio V.

9 *Radius circuli est recta quæcumque linea ducta a centro circuli in illius peripheriam*. Hic *semidiameter* etiam dicitur, quod sit medietas *diametri*. Tales igitur in circulo ABCD sunt rectæ EA, EB, EC, ED; cum earum quælibet cadat a centro E ipsius circuli in illius peripheriam ABCD. Fig.25. Tab.II.

Corollarium I.

10. *Omnes ejusdem circuli radii sunt inter se æquales*. Omnes namque illæ rectæ lineæ æquales sunt inter se, quæ a centro circuli in illius peripheriam cadunt (§. 3.).

Corollarium II.

11. *Omnes quoque ejusdem circuli diametri sunt inter se æquales*. Cum enim quælibet diameter sit dupla radii, sicut omnes radii, ita diametri omnes ejusdem circuli erunt inter se æquales (*Lib. I. §. 103.*).

COROLLARIUM III.

12. *Anguli quos efficit radius quilibet circuli cum ejusdem peripheria, sunt æquales*. Angulus nimirum EDA æqualis est angulo EDC, quos efficit radius ED circuli ABCD cum ejusdem peripheria ABCD. Etenim si sumantur hinc inde æquales arcus DA, DC, eorumque alter revolvatur, immoto existente radio ED, illi sibi mutuo congruent (§. 6.). Congruunt ergo anguli EDA, EDC. Igitur sunt inter se æquales (*Lib.V.§.* 34.).

Fig.23. Tab.III.

DEFINITIO VI.

13. *Chorda circuli est qualibet recta linea intra circulum ducta, & utrinque ad illius peripheriam terminata*. Hujusmodi in circulo ABCD est tum recta AC, tum recta DC. Harum porro rectarum altera AC dicitur chorda arcus ABC, altera DC chorda arcus DGC, quibus subtenduntur, nuncupatur.

Fig 24. Tab.II.

COROLLARIUM.

14. *Omnis circuli diameter est illius chorda*. *At non vicissim*. Non enim chorda, quemadmodum diameter, id necessario requirit, ut per circuli centrum transeat.

DEFINITIO VII.

Fig.22. Tab.II. 15. *Semicirculus est figura sub circuli diametro, ejusque semiperipheria comprehensa*, ut EDAB, BCDB. Diximus enim, omnem circuli diametrum bifariam circulum ipsum dividere (§. 8.).

DEFINITIO VIII.

16. *Quadrans circuli est quarta pars ipsius circuli, nimirum figura contenta sub quarta parte peripheriæ, & duobus radiis angulum rectum in centro circuli constituentibus*. Talis est figura DEC. Continetur enim sub arcu DC, qui est quarta pars peripheriæ ABCD totius circuli ABCD, & sub duobus radiis ED, EC, qui angulum rectum in centro E ipsius circuli constituunt.

Fig.23. Tab.II.

COROLLARIUM.

17. *Arcus quadrantis* 90. *gradus continet*. Tota enim peripheria circuli in 360. *gradus* dividitur (*Lib.* III.§. 47.).

DEFINITIO IX.

18. *Segmentum circuli est portio ipsius circuli contenta sub parte peripheriæ, &*

& chorda illi subtensa. Sic portio DGC circuli DAC arcu DGC, ejusque chorda DC comprehensa, ipsius circuli segmentum nuncupatur. Fig.24. Tab.II.

COROLLARIUM.

19. Cum circuli diameter bifariam circulum ipsum dividat, *illud circuli segmentum erit majus, quod illius centrum continet; illud vero minus, quod circuli centrum minime comprehendit*. Segmentum scilicet DAC circuli DAC majus erit segmento DCG ejusdem; cum circuli centrum in segmento DCA reperiatur. Fig.24 Tab.II.

DEFINITIO X.

20. *Sector circuli est illius portio sub duobus radiis, & arcu, quem illi intercipiunt, comprehensa*. Hujusmodi est pars HEC circuli ABCD, continetur enim sub duobus radiis EH, EC, & arcu HC. Fig.23. Tab.II.

DEFINITIO XI.

21. *Recta linea circulum tangere dicitur, quæ habet commune punctum in peripheria, & si in directum producatur, tota extra ipsum circulum cadit*. Contra vero *illa dicitur secare circulum, quæ producta illius peripheriam dirimit*. Sic recta GF tangit circulum ABF; cum directe producta in H, tota extra ipsum circulum consistat. At vero e contrario recta KF secat circulum CFD; cum si directe producatur in L, illius aream subeat. Fig. 25. Tab.II.

DEFINITIO XII.

22. *Duo circuli sese mutuo tangere dicuntur, cum eorum peripheriæ habent commune punctum, quin earum una alteram dirimat*. Verum dupliciter duo circuli possunt sese mutuo tangere, *intus*, & *extra*. Se tangunt *extra*, cum ita sese tangunt, ut tamen eorum unus totus *extra* alterum reperiatur, sicuti patet de duobus circulis AEF, FDC sese mutuo tangentibus in F. Contra vero sese mutuo tangent *intus*, cum eorum unus totus intra alterum consistit: qua ratione sese tangunt duo circuli ABC, CDE. Est enim punctum C commune peripheriis utriusque circulis, simulque circulus ABC circulum CDE totaliter continet. Fig. 25. Fig.26. Tab.II.

DEFINITIO XIII.

23. *Duæ rectæ lineæ dicuntur æqualiter hinc inde distare a centro circuli, in quo utraque reperitur, cum rectæ a centro ipsius circuli in illas ad perpendiculum ductæ, inter se sunt æquales*. Contra vero *illa magis, quam alia, a circuli centro distat, in quam ab ipso centro major perpendicularis cadit*. Duæ nimirum rectæ AB, CD æqualiter hinc inde distant a centro Fig.27. Tab.II.

E circuli ACDB; quia rectæ EF, EG ductæ in illas a centro E, ipsisque ad perpendiculum insistentes, sunt inter se æquales. Si autem perpendicularis EF major esset recta perpendiculari EG, recta AB magis, quam recta CD, ab ipso centro E distare diceretur.

DEFINITIO XIV.

24. *Angulus ad centrum, sive in centro circuli positus, vocatur ille, qui*
Fig.23. *a duobus ipsius circuli radiis in ipso centro efficitur*. Sic angulus HEC pro-
Tab.II. ductus in centro E circuli ABCD a duobus radiis EH, EC dicitur angulus ad centrum, sive in centro ipsius circuli ABCD.

COROLLARIUM I.

25. *Mensura anguli ad centrum circuli est arcus ipsius circuli, quem illius crura comprehendunt*. Mensura nimirum anguli HEC positi in centro E
Fig.23. circuli ABCD, est arcus HC peripheriæ ipsius circuli intra illius crura
Tab.II EH, EC comprehensus. Arcus namque HC descriptus habetur ex ipsius anguli apice E, prout requiritur, ut illius mensura dici possit (*Lib.*III.§.13.).

COROLLARIUM II.

26. *Tot ergo* graduum, & minutorum *erit angulus ad circuli centrum po-*
Fig.23. *situs, quot* gradus, & minuta *ille numerat arcus, quem ipsius anguli crura*
Tab.II. *intercipiunt*. Videlicet angulus HEC ad centrum E circuli ABCD dicetur tot *graduum*, & *minutorum*, quod erunt *gradus*, & *minuta in arcu* HC.

COROLLARIUM III.

27. *Anguli positi in centro circuli sunt directe inter se, ut arcus ipsius circuli, quos eorum crura comprehendunt*. Et vicissim *arcus hujusmodi eam habent rationem inter se, quam habent anguli ad centrum circuli consistentes,*
Fig.23. *quibus ipsi arcus subtenduntur*. Ut si ad centrum E circuli ABCD duo fue-
Tab.II. rint anguli BEH, HEC, erit angulus BEH ad angulum HEC, ut est arcus BH ad arcum HC. Et vicissim arcus BH erit ad arcum HC, ut est angulus BEH ad angulum HEC. Id enim ex eo necessario sequitur, quod arcus BH, HC quantitatem angulorum BEH, HEC definiant.

COROLLARIUM IV.

28. *Ut angulus in centro circuli ad quatuor rectos, ita arcus illi subtensus ad totam peripheriam*. Et vicissim, *ut arcus circuli ad totam peripheriam, ita angulus*
Fig.23. *in centro ipsius circuli illi arcui insistens ad quatuor rectos*. Nimirum si in centro E
Tab.II. circuli ABCD fiant quatuor anguli recti AED, DEC, CEB, BEA, angulusque spectetur HEC ad ipsum itidem centrum positus, arcus HC illi subtensus eam habebit rationem ad totam peripheriam ABCD, quam habet angulus HEC ad qua-

quatuor rectos AED, DEC, CEB, BEA. Et vicissim angulus HEC erit ad quatuor rectos AED, DEC, CEB, BEA, ut est arcus HC ad totam peripheriam ABCD. Enimvero ficuti arcus HC metitur angulum HEC, ita quatuor quadrantes AB, BC, CD, DA, five tota peripheria ABCD metitur quatuor rectos angulos AEB, BEC, CED, DEA (*Lib.*III. §. 45.). Ergo quam proportionem habet angulus HEC ad quatuor rectos AEB, BEC, CED, DEA, eandem habebit arcus HC ad totam peripheriam ABCD; & vicissim quam habet rationem arcus HC ad totam peripheriam ABCD, eandem quoque habebit angulus HEC ad quatuor rectos AEB, BEC, CED, DEA.

S C H O L I O N.

29. Ceterum ex eo, quod circa centrum circuli nonnisi quatuor anguli recti constitui possint (*ibid.*), angulique ad centrum positi mensura sit arcus ipsius circuli illi subtensus, ad evidentiam deducitur, omnes angulos rectos esse inter se æquales, quæcumque sit longitudo linearum, quæ angulum ipsum constituunt. Enimvero, cum angulus AED consistens in centro E circuli ABCD sit rectus, alter AEB deinceps, positus erit illi æqualis (*ibid.* §. 18.); cumque angulorum AED, AEB mensura sit semiperipheria BAD, quam determinat diameter BD (§. 8.), stante æqualitate angulorum BEA, AED, arcus AD, AB erunt æquales; ac proinde mensura anguli recti AED erit medietas semiperiheriæ BAD, sive quadrans totius peripheriæ, arcus nimirum AD. Omnes autem anguli recti sunt hujusmodi, ut, si alterum ipsorum crus directe producatur, efficiant angulum sibi æqualem; atque adeo si eodem intervallo ex singulorum apice circulus describatur; arcum subtendant a quadrante ipsius circuli haudquaquam diversum. Ergo mensura omnium angulorum rectorum est quarta pars peripheriæ ejusdem circuli. Omnes autem illi anguli æquales sunt inter se, quos idem arcus circuli ex eorum apice descriptus metitur (§. 27.). Igitur omnes anguli recti sunt inter se æquales. Fig. 23. Tab. II.

DEFINITIO XV.

30. *Angulus ad peripheriam circuli vocatur ille, cujus apex in peripheria consistit, crura vero in eandem desinunt, ejusque arcum continent.* Hujusmodi est angulus ADC. Illius quippe apex D in peripheria circuli ADC reperitur; crura vero DA, DC ad eandem terminantur. Fig. 24. Tab. II.

DEFINITIO XVI.

31. *Anguli tam ad circuli centrum, quam ad illius peripheriam positi, dicuntur illi arcui insistere, quem illorum crura intercipiunt.* Sic angulus ad centrum HEC insistere dicitur arcui HC, & angulus ad peripheriam ADC arcui ABC. Fig. 23. Fig. 24. Tab. II.

DEFINITIO XVII.

32. *Angulus in portione circuli consistens vocatur ille, qui efficitur a duabus rectis lineis ductis a puncto ipsius arcus ad puncta ejusdem extrema.* Sic
Fig.24. Tab.I. angulus ADC consistere dicitur in portione, sive segmento ACD circuli ADC, quemadmodum etiam angulus ABC in portione ACB ejusdem circuli.

DEFINITIO XVIII.

33. *Angulus segmenti est ille, qui a recta circulum tangente, & chorda per punctum contactus ducta efficitur.* Talis est angulus DCE productus in puncto contactus C a recta FE circulum DAC tangente, & a chorda DC,
Fig.24. Tab.II. sicuti etiam angulus DCF productus in eodem puncto ab iisdem rectis, nimirum a tangente EF, & a chorda DC. Angulus enim DCE dicitur angulus segmenti minoris DCG, & angulus DCF segmenti majoris DAC: ubi notandum est, segmentum DCG dici alternum, si ad angulum DCF, & segmentum DAC itidem alternum vocari, si ad angulum DCE referatur.

SCHOLION.

34. Angulum segmenti aliter nonnulli definiunt. Dicunt enim, *angulum segmenti esse illum, qui circuli arcu, ejusque chorda comprehenditur*, cujusmodi est angulus GDC.

DEFINITIO XIX.

35. *Angulus contactus vocatur ille, qui a recta tangente, & arcu in*
Fig.23. *puncto contactus efficitur.* Hujusmodi est angulus FAB, qui fit in puncto
Tab.II. contactus A a recta tangente FA, & ab arcu BA.

THEOREMA I.

Unius circuli unicum est centrum.

36. Esto circulus ABCD, cujus centrum sit punctum E. Dico, in illius area nullum aliud assignari posse punctum, quod pro illius centro haberi queat.

Demonstratio.

Si namque fieri potest, circuli ABCD duo sint centra E, H. Igitur du-
Fig.25. cta per utrumque recta AC, eaque ad peripheriam usque perducta, erit re-
Tab.II. cta EC rectæ EA æqualis (§. 10.); ac proinde recta HC major recta HA (*Syn. Alg.* §. 257.). Ergo punctum H non est centrum circuli ABCD, eandem-

demque ob causam nullum aliud diversum a puncto E. Unius itaque circuli &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA II.

In eodem, vel aequalibus circulis aequales arcus aequales rectas capiunt, & vicissim arcus, qui aequales rectas capiunt, sunt aequales.

I.

37. In circulo ABC sumantur aequales arcus BO, OC. Dico, illorum chordas BO, OC esse inter se aequales.

Demonstratio.

Cum enim arcus BO, OC sint aequales, ductis radiis DB, DO, DC, anguli BDO, ODC erunt aequales (§. 27.). Aequalia sunt autem etiam latera DB, DO, DC triangulorum BOD, DOC (§. 10.). Ergo bases quoque BO, OC erunt aequales (*Lib. V.* §. 73.). Fig. 28. Tab. II.

II.

38. Vicissim vero aequales sint chordae BO, OC. Dico, aequales quoque esse arcus BO, OC.

Demonstratio.

Etenim iisdem positis, anguli BDO, ODC erunt aequales (*ibid.* §. 82.), ob aequalitatem scilicet laterum BD, DO, DC, nec non basium BO, OC. Ergo aequales itidem erunt arcus BO, OC, quibus anguli ipsi insistunt (§. 27.). In eodem igitur, vel aequalibus circulis &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA III.

Si radius circuli ad angulos rectos, sive ad perpendiculum chordam secuerit, bifariam ipsam, ejusque arcum secabit. Et vicissim radius circuli bifariam chordam secans, est ipsi chordae perpendicularis.

I.

39. In circulo ABC radius DO ad angulos rectos dividat chordam BC. Dico, ipsam chordam BC a radio DO bifariam dividi.

Demonstratio.

Ad extrema chordæ BD ducantur radii DB, DC. Cum igitur rectæ DB,
Fig.28. DC sint æquales (§. 10.) triangulum BDC erit isosceles (*Lib. V.* §. 25.). Est
Tab.II. autem per hypothesim recta DE basi BC ipsius trianguli perpendicularis.
Ergo recta DE bifariam basim ipsam BD secabit (*Lib. V.* §. 78.) adeoque &c.

II.

40. Dico, radium DO bifariam quoque dividere arcum BOC chordæ BC.

Demonstratio.

Cum enim radius DO, ut modo ostensum est, bifariam dividat basim BC trianguli isoscelis BDC, illius quoque angulum verticalem BDC bifariam secabit (*ibid.* §. 86.). Anguli ergo BDO, ODC sunt æquales. Ergo æquales quoque sunt arcus BO, OC, quibus anguli ipsi insistunt (§. 27.); ac proinde &c.

III.

41. Vicissim vero radius DO bifariam dividat chordam BC in puncto E. Dico, sectionem hujusmodi esse ad angulos rectos, atque ideo radium DO chordæ BC ad perpendiculum insistere.

Demonstratio.

Quia iisdem positis, triangulum BDC est isosceles, & recta DE ducta est ab angulo ipsius verticali BDC ad basim BC. Ergo si recta DE bifariam basim ipsam dividit, erit ipsi basi perpendicularis (*Lib. V.* §. 89.). Itaque si radius circuli &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA IV.

Si in circulo recta quædam linea aliam rectam bifariam, & ad angulos rectos secuerit, erit in recta secante centrum circuli.

42. In circulo ABCD recta AC bifariam, atque ad angulos rectos dividat rectam BD. Dico, centrum circuli ABCD in ipsa secante AC reperiri.

Demonstratio.

Si namque stante hypothesi, centrum circuli ABCD in recta secante AC non existit, hujusmodi centrum sit extra illam, videlicet punctum F. Ducatur ergo a centro F in rectam BD recta FE. Igitur cum recta BD dividatur in pun-

puncto E bifariam a recta AC, ipsa quoque BD bifariam secabitur a recta FE. Cumque recta FE ex centro F ipsius circuli in rectam cadat BD, erit recta FE rectæ BD perpendicularis (§. 41.). Posita est autem etiam recta AE perpendicularis rectæ eidem BD, & quidem ad idem punctum E. Ergo duæ rectæ EA, EF excitari possunt ad easdem partes ex eodem puncto E eidem rectæ BD ad perpendiculum incumbentes. Hoc autem omnino repugnat (*Lib.* III. §. 50.). Ergo punctum F non est centrum circuli ABCD. Eodem modo demonstrabitur, nullum punctum extra rectam secantem AC esse centrum circuli ABCD. Igitur hujusmodi centrum est in secante AC; adeoque si in circulo &c. quod erat ostendendum. Fig. 1. Tab. III.

THEOREMA V.

Recta linea ducta ad angulos rectos per extremum diametri extra peripheriam ipsius circuli totaliter cadit. Ex illo autem puncto nequit duci alia recta, quæ locum habeat inter arcum circuli integrum, & rectam ipsam tangentem, sed alia quæcumque hujusmodi linea ipsius circuli peripheriam secabit.

I.

43. Per extremum punctum C diametri AC ducatur ad angulos rectos recta KL. Dico, totam KL extra peripheriam cadere ipsius circuli ABCD.

Demonstratio.

Cum enim ex hypothesi radius OC ad perpendiculum rectæ KL insistat, minima erit omnium rectarum OG, OK, quæ a centro O ipsius circuli ABCD in rectam KL cadere possunt (*Lib. V.* §. 57.). Ergo alia quæcumque recta linea ducta a centro O in rectam KL secundum aliquam sui partem extra peripheriam cadet ABCD. Omnes enim radii sunt inter se æquales (§. 10.). Quamobrem singula puncta rectæ KL cadent extra peripheriam ABCD, præter punctum C, quod est ipsi peripheriæ, rectæque KL commune; adeoque &c. Fig. 2. Tab. III.

II.

44. Rursus dico ex puncto C excitari non posse rectam, quæ locum habeat inter arcum CD, & rectam CL, quin secundum aliquam sui partem intra circulum ABCD cadat.

Demonstratio.

Si namque fieri potest, hujusmodi linea fit recta CM. Igitur cum angulus OCL ex hypothesi sit rectus, angulus OCM erit minor recto, ac proinde radius OC non erit ad perpendiculum rectæ CM. Ducatur itaque a centro O in ipsam

ipsam CM recta perpendicularis OH. Hæc propterea minor erit aliis omnibus, quæ a centro O in ipsam CM cadere possunt, adeoque etiam recta OC (*Lib. V.* §. 57.). Recta autem OH simul excedit rectam OC; cum ex hypothesi recta OH secundum aliquam sui partem extra peripheriam circuli ABCD cadat. Ergo recta OH erit simul major, & minor radio OC, quo certe nihil absurdius. Nequit igitur recta CM locum habere inter arcum CD, & rectam CL; adeoque recta linea &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Angulus contingentiæ nulla recta linea dividi potest.

45. Neque enim potest recta linea dividere angulum contingentiæ DCL, nisi educta ex puncto C locum habeat inter arcum CD, & rectam CL, ut patet.

COROLLARIUM II.

Si centris in eadem recta linea in infinitum producta acceptis, describantur per ejusdem rectæ extremum infiniti circuli, recta per idem extremum ad angulos rectos traducta, extra omnium peripheriam tota versabitur.

46. Recta nimirum HK ducta ad angulos rectos per extremum punctum B rectæ BA, tota versabitur extra peripheriam circulorum AEB, CB, DFB, & aliorum quotcumque in infinitum, centrum habentium in eadem recta BA directe ad partem A in infinitum producta. Quod enim de uno AEB ostensum est, de ceteris omnibus eodem modo demonstrabitur.

Fig. 3. Tab. III.

COROLLARIUM III.

Peripheriæ circulorum, centrum in eadem recta habentium, transeuntes per extremum punctum illius rectæ lineæ, quo majores sunt, magis quidem accedunt ad rectam per illud punctum traductam, at nunquam illi rectæ congruere possunt.

47. Sic peripheria circuli DFB proximior est rectæ BK, quam peripheria circuli CB. At fieri nequit, ut peripheria unius ex illis circulis, quamvis extensionis infinitæ, congruat rectæ BK in altero puncto præter punctum B. Id enim si contingere posset, recta BK extra illius peripheriam tota non caderet.

Fig. 3. Tab. III.

Co-

COROLLARIUM IV.

Angulus contingentiæ curva linea dividi, & in infinitum minui potest.

48. Quandoquidem evidens est, angulum contingentiæ EBK in plures dividi ope arcuum BC, BF. Cumque infinitæ circulorum peripheriæ per punctum B transire queant, manifeste constat, angulum ipsum EBK in infinitum minui posse. Fig. 3. Tab. III.

SCHOLION.

49. Quamquam *angulus contingentiæ* ope rectæ lineæ dividi nequeat, non propterea *absolute* indivisibilis censendus est, cum, ut modo vidimus, circuli arcus ipsum perfecte dividat. Perperam quoque hinc infertur, *angulum contingentiæ* minorem esse quocumque rectilineo acuto quantumvis exiguo. Quandoquidem cum *angulus contingentiæ* sit angulus mixtus, utpote qui a recta curvaque linea efficitur, diversi omnino generis est a rectilineo; adeoque illegitima est quæcumque inter illos instituta comparatio. Debent enim magnitudines esse ejusdem generis, ut una ad alteram referri possit (*Lib. I. §. 3.*).

THEOREMA VI.

Si recta linea circulum tangat, a centro autem ipsius circuli ad punctum contactus recta ducatur, erit tangenti perpendicularis.

50. Circulum ABCD tangat recta quædam KL in puncto C. Ducatur autem a centro O ipsius circuli ad punctum contactus C recta OC. Dico, rectam, sive radium OC rectæ tangenti KL ad perpendiculum incumbere.

Demonstratio.

Etenim si radius OC ad perpendiculum non incumbit rectæ KL, sit recta OG ipsi KL perpendicularis. Hæc ergo erit minor recta OC (*Lib. V. §. 57.*), quæ perpendicularis non est. Est autem segmentum OP ipsius OG æquale rectæ OC (*§. 10.*), ac proinde tota OG major est ipsa OC. Ergo recta OC simul major, & minor erit recta OC, quo nihil absurdius. Recta igitur OG rectæ tangenti KL ad perpendiculum non incumbit, eandemque ob causam nulla alia præter rectam OC. Itaque si recta linea &c. quod erat ostendendum. Fig. 2. Tab. III.

Co-

COROLLARIUM I.

Circulus rectam tangens, in uno tantum puncto ipsam tangit.

51. Si namque in pluribus simul punctis rectam tangeret, plures simul rectæ ex eodem puncto, scilicet centro tangentis circuli, in ipsam rectam cadere possent, eidem ad perpendiculum insistentes, ut *ex hoc theoremate* liquido constat. Id autem aperte falsum est (*Lib. V.* §. 49.). Ergo circulus rectam tangens, in uno tantum puncto ipsam tangit.

COROLLARIUM II.

Circulus circulum exterius tangens, in uno tantum puncto ipsum tangit.

Fig. 25. Tab. II. 52. Etenim si circulus AB exterius tangens circulum CD, in pluribus punctis ipsum tangeret, uterque in pluribus simul punctis tangeret rectam GH per punctum contactus F traductam. Ergo, cum id repugnet (§. 51.), circulus AB circulum CD in uno tantum puncto tangit.

COROLLARIUM III.

Si a centro circuli rectam tangentis ad ipsam tangentem recta ducatur, quæ illi ad perpendiculum insistit, cadet hujusmodi recta in punctum contactus.

Fig. 2. Tab III 53. Ut si a centro O circuli ABD tangentis rectam KL in puncto C ducatur ad ipsam tangentem recta perpendicularis, cadet illa in punctum contactus C. Si namque fieri potest, cadat hujusmodi recta extra punctum C, eaque sit recta OG. A centro autem O ad punctum contactus C ducatur recta OC. Hæc igitur erit tangenti KL perpendicularis (§. 50.). Posita est autem etiam recta OG eidem KL perpendicularis. Ergo duæ rectæ perpendiculares cadunt ab eodem puncto O in eandem rectam KL. Id autem repugnat (*Lib. V.* § 49.). Ergo recta OG non est perpendicularis tangenti KL. Eodem modo ostendam, nullam rectam cadere posse a puncto O in rectam KL, quæ sit ipsi KL perpendicularis, quin cadat in punctum contactus C; adeoque &c.

THEOREMA VII.

Circulus circulum interius tangens, in uno tantummodo puncto ipsum tangit.

54. Circulus DF intra circulum ABC positus, ipsum tangat in C. Dico, hujusmodi contactum in uno puncto tantummodo fieri.

Demon-

Demonstratio.

Si namque fieri potest, circulus DE tangat circulum ABC in duobus simul punctis C, F, sitque punctum H centrum circuli ABC, & punctum G centrum circuli DE. Ducatur itaque per eorum centra H, G recta HC, quæ per unum punctum contactus C incedat. Ad alterum vero punctum contactus F ducatur a centro G recta GF, & a centro H recta HF. Cum igitur punctum G sit centrum circuli DE, duæ rectæ CG, GF, utpote illius radii, erunt æquales (§. 10). Quamobrem addita utrique recta GH, erunt duæ HG, GF simul sumtæ æquales rectæ HC (*Syn. Alg* §. 265.). Est autem recta HF æqualis rectæ HC; cum utraque sit radius circuli ABC. Ergo duæ HG, GF rectæ quoque HF æquales erunt (*Ibid* §. 259.); ac proinde duo trianguli latera tertium æquabunt. Id autem repugnat (*Lib. V.* §. 69.). Ergo contactus circulorum DE, ABC fieri nequit in duobus punctis C, F. Itaque circulus circulum tangens &c. quod erat ostendendum. Fig. 26. Tab. II.

THEOREMA VIII.

Si a centris duorum circulorum sese exterius tangentium duæ rectæ ad punctum contactus ducantur, erunt illæ duæ rectæ lineæ in directum positæ.

55. Duo circuli AB, CD sese exterius tangant in puncto F. A centro autem K circuli AB ducatur ad punctum F recta KF, & a centro L circuli CD ad idem punctum recta LF. Dico, rectas KF, FL esse in directum positas.

Demonstratio.

Ducta per punctum F recta GH utrumque circulum in illo puncto tangente, utraque KF, LF illi ad perpendiculum incumbet (§. 53); rectusque subinde erit uterque angulus KFG, LFG (*Lib* III. §. 23.). Ergo duæ KF, LF erunt in directum positæ, seu unam eandemque rectam KL constituent (*ibid.* §. 49.). Itaque si a centris duorum circulorum &c. quod erat ostendendum. Fig. 25. Tab. II.

COROLLARIUM.

Si duo circuli se tangant exterius, recta eorum centra conjungens per punctum contactus transibit.

56. Ut si duo centra K, L circulorum AB, CD sese exterius tangentium jungantur recta linea, hæc transibit per punctum contactus F. Etenim si fieri potest, transeat extra illud punctum, sitque linea KOL. Cum igitur rectæ KF, LF, ductæ a centris K, L ad punctum contactus F unam eandemque rectam constituant, recta erit utraque KL, KOL; ac proinde duæ rectæ spatium claudent, quo nihil absurdius (*Lib.* IV. §. 7.). Ergo &c. Fig. 25. Tab. II

THEO-

THEOREMA IX.

Si duo circuli intus sese tangant, recta ducta per eorum centra transibit per punctum contactus.

57. Duo circuli AEB, DFB intus sese tangant in puncto B. Ducatur autem per eorum centra N, O recta NO, eaque in directum producatur Dico, futurum esse, ut transeat per punctum contactus B.

Demonstratio.

Transeat namque, si fieri potest, extra punctum B, ut recta NL, sitque punctum P centrum circuli AEB, & punctum N centrum circuli DFB. Ducantur autem radii PB, NB ad commune utriusque punctum B. Igitur cum punctum N sit centrum circuli DFB, rectæ NL, NB erunt æquales (§. 10.). Eadem ratione æquales erunt duæ PM, PB; cum punctum P positum sit centrum circuli AEB. Addita propterea communi PN, erit recta NM æqualis duabus NP, PB simul sumtis (*Syn. Alg.* §. 265.). Duæ autem NP, PB majores sunt reliqua NB (*Lib. V.* §. 69.). Ergo recta quoque NM rectam NB superabit (*Syn. Alg.* §. 264.) adeoque etiam rectam NL, utpote quæ rectæ NB ostensa est æqualis. Pars igitur NM major erit suo toto NL, quo nihil absurdius (*Ibid.* §. 257.). Recta igitur conjungens centra circulorum AEB, DFB extra punctum contactus B non cadit; adeoque si duo circuli intus &c. quod erat ostendendum.

Fig. 3. Tab.III.

THEOREMA X.

Si recta circulum tangat, atque a puncto contactus recta intra circulum excitetur, quæ tangenti ad perpendiculum insistat, erit in illa centrum ipsius circuli.

58. Circulum ABCD tangat recta HK in puncto C. Ex illo autem excitetur intra circulum recta CA ipsi HK ad perpendiculum insistens. Dico, in recta perpendiculari CA esse centrum ipsius circuli ABCD.

Demonstratio.

Etenim, si fieri potest, centrum circuli ABCD extra rectam perpendicularem CA reperiatur, sitque illud punctum L. Ab ipso itaque cadat in punctum contactus C recta LC. Hæc ad perpendiculum incumbet rectæ tangenti HK (§. 50.). Eidem autem rectæ ad idem punctum C perpendiculariter insistit recta CA ex hypothesi. Ergo duæ CA, CL sunt simul perpendiculares eidem rectæ HK. Hoc autem repugnat (*Lib. III* §. 50.). Ergo punctum L non est centrum circuli ABCD. Eodem modo demonstrabitur, nul-

Fig. 1. Tab.III.

nullum punctum extra rectam perpendicularem CA esse centrum circuli ABCD. Ergo hujusmodi centrum in ipsa perpendiculari CA reperitur. Itaque si recta circulum tangat &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XI.

In circulo aquales recta linea aqualiter a centro distant; & qua aqualiter a centro distant, sunt aquales.

I.

59. In circulo ACDB duæ habeantur rectæ inter se æquales AB, CD. Dico, illas æqualiter distare a centro E ipsius circuli.

Demonstratio.

Ducantur a centro E ad ipsas rectas AB, CD rectæ perpendiculares EF, EG, atque ab eodem centro ad extrema earundem puncta radii EA, EB, EC, ED. Rectæ igitur AB, CD bifariam divisæ erunt a rectis perpendicularibus EF, EG (§. 39.). Quamobrem, cum duæ AB, CD positæ sint æquales earum quoque medietates FB, GD æquales erunt (*Lib. I. §.* 126.). Rursus cum duæ AB, CD sint æquales, sicuti etiam duæ EB, ED, necnon duæ EA, EC (§. 10.), angulus ABE angulo EDC æqualis erit (*Lib. V.* § 82.). Ostensum est autem, duo latera FB, GD triangulorum FBE, GDE esse æqualia sicuti etiam duo EB, ED. Ergo bases quoque ipsorum triangulorum FE, EG erunt æquales (*Ibid.* §. 73.); atque adeo rectæ AB, CD æqualiter distant a centro E ipsius circuli (§. 23.). Fig. 27. Tab. II.

I I.

60. Vicissim vero rectæ AB, CD ex æquo distent a centro E circuli ACDB, adeoque rectæ perpendiculares FE, EG sint inter se æquales. Dico, æquales quoque esse inter se rectas AB, CD.

Demonstratio.

Cum enim rectæ FE, EG ad perpendiculum ex hypothesi incumbant rectis AB, CD, anguli EFB, EGD erunt recti (*Lib. III.* §. 23.); duoque propterea triangula EFB, EGD erunt rectangula (*Lib. V.* §. 29.). Igitur quadratum hypotenusæ EB æquale erit quadratis laterum EF, FB, sicuti etiam quadratum hypotenusæ ED quadratis laterum EG, GD (*Lib VI.* §. 37.). Sunt autem quadrata laterum EB, ED inter se æqualia (*Lib. I.* §. 187.), ob æqualitatem scilicet rectarum EB, ED (§. 10.). Ergo duo itidem quadrata laterum EF, FB simul sumta æqualia erunt quadratis laterum EG, GD simul pariter sumtis (*Syn. Alg.* §. 259.). Æqualia autem sunt quadrata

recta-

rectarum æqualium EF, EG (*Lib.* I. §. 187.). Ergo, his sublatis, quadratum lateris FB quadrato lateris GD æquale erit (*Syn. Alg.* §. 266.); atque adeo etiam ipsa latera FB, GD, erunt æqualia (*Lib.* I. §. 187.). Eodem modo demonstrabitur, æqualia esse etiam segmenta AF, CG. Igitur, tota AB toti CD æqualis erit (*Lib.* I. §. 127.). In circulo itaque &c. quod erat ostendendum.

S C H O L I O N.

61. Cum rectæ perpendiculares EF, EG bifariam dividant rectas AB, CD (§. 39.), si segmenta FB, GD æqualia sunt inter se, etiam tota AB totam CD æquabit (*Lib.* I. §. 127.).

C O R O L L A R I U M.

Rectæ in circulo æqualiter ab illius centro distantes æqualibus arcubus subtenduntur; & quæ æqualibus arcubus subtenduntur, æqualiter ab illius centro distant.

62. Ut si in circulo ACDB rectæ AB, CD æqualiter ab illius centro E distantes fuerint, arcus AB, CD, quibus illæ subtenduntur, erunt æquales; & vicissim si arcus hujusmodi fuerint æquales, chordæ AB, CD æqualiter
Fig. 27. a centro E distabunt. Etenim si rectæ AB, CD a centro E æqualiter di-
Tab. II. stant, æquales erunt inter se (§. 60.). Ergo arcus quoque AB, CD erunt æquales (§. 38.). Vicissim si arcus AB, CD sunt æquales, æquales itidem erunt rectæ AB, CD (§. 37.); ac proinde æqualiter distabunt a centro E circuli (§. 59.).

T H E O R E M A XII.

In circulo recta, quæ per centrum transit, est omnium rectarum, quæ in ipso circulo duci possunt, maxima. Aliarum vero, quæ propinquior est centro, remotiore major est.

In circulo AFC plures habeantur rectæ AC, DE, FG, quarum AC per centrum B ipsius circuli transeat.

I.

63. Dico primo, rectam AC esse omnium maximam.

Demonstratio.

Ex centro B ipsius circuli ducantur ad extrema puncta D, E rectæ DE, radii BD, BE, constituaturque triangulum DBE. Manifestum est, rectas BA,

BA, BD, BC, BE esse inter se æquales (§. 10.); cum sint radii ejusdem circuli. Igitur tota AC æqualis erit duabus BD, BE. Sunt autem duæ BD, BE simul sumtæ majores reliqua DE (*Lib. V. §. 69.*). Ergo recta quoque AC rectam DE superabit (*Syn. Alg. §. 264.*). Eadem ratione ostendam, rectam AC majorem esse recta FG, iisque omnibus, quæ in ipso circulo AFC reperiri possunt; adeoque &c. Fig. 4. Tab. III.

II.

64. Dico secundo, rectam DE, propinquiorem centro B majorem esse recta FG, quæ ab ipso centro est remotior.

Demonstratio.

Ducantur a centro B ad extrema puncta rectæ FG radii BF, BG, ut proinde constitutum habeatur triangulum FBG. Duo itaque latera BF, BG trianguli FBG æqualia erunt lateribus BD, BE trianguli DBE (§. 10.); cum omnia sint radii ejusdem circuli. Constat autem, angulum DBE majorem esse angulo FBG (*Syn. Alg. §. 257*). Ergo basis quoque DE major erit base FG (*Lib. V. §. 95.*). Recta igitur in circulo, quæ proximior est illius centro, remotiore major est; adeoque in circulo recta &c. quod erat ostendendum.

Corollarium I.

Diameter circuli est omnium rectarum, quæ in ipso circulo duci possunt, maxima.

65. Ex omnibus namque rectis, quæ in circulo constitui possunt, sola diameter hujusmodi est, ut per circuli centrum transeat (§. 7.).

Corollarium II.

Omnium chordarum maxima est diameter.

66. Quandoquidem ex omnibus chordis sola diameter per circuli centrum transit; cum omnis recta, quæ per centrum transit, sit circuli diameter (*Ibib.*)

Corollarium III.

Maxima rectarum, quæ in circulo constitui possunt, per illius centrum transit.

67. Etenim, si secus, diameter circuli non esset omnium maxima. Quippe altera recta haberetur in circulo, diversa ab ipsius diametro, & simul major diametro.

THEOREMA XIII.

Chorda majoris arcus circuli major est chorda arcus minoris, & vicissim minor chorda minorem, quam major, arcum subtendit.

I.

68. In circulo AFC duo spectentur arcus DOE, FOG, sitque arcus DOE
Fig. 4. Tab.III. major arcu FOG. Dico, chordam DE majoris arcus majorem esse chorda FG arcus minoris.

Demonstratio.

A centro B ipsius circuli ducantur ad extrema puncta chordarum, adeoque etiam arcuum, radii BD, BF, BG, BE. Cum igitur arcus DOE major sit arcu FOG, angulus quoque DBE angulum FBG superabit (§. 27.). Sunt autem latera DB, FB æqualia inter se, quemadmodum etiam latera BG, BE (§. 10.). Igitur basi DE trianguli DBE major erit base FG trianguli FBG (*Lib. V.* §. 95.); adeoque &c

II.

69. Vicissim vero chorda DE major sit chorda FG. Dico arcuum quoque DOE chordæ DE majorem esse arcu FOG chordæ FG.

Demonstratio.

Ductis radiis DB, FB, GB, EB, ut supra, constitutisque propterea triangulis DBE, FBG; cum duo latera DB, FB æqualia sint inter se, sicuti etiam duo GB, EB (§. 10.) & basis DE major sit ex hypothesi base FG, angulus quoque DBE major erit angulo FBG, qui æqualibus lateribus continentur (*Lib. V.* §. 96.). Est autem arcus DOE ad arcum FOG, ut angulus DBE ad angulum FBG (§. 27.). Ergo arcus quoque DOE major erit arcu FOG (*Lib. I.* §. 45.). Igitur chorda majoris arcus circuli &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Circuli chorda, quo magis a centro distat, eo minorem arcum subtendit.

70. Enimvero, quo magis chorda a circuli centro distat, eo minor est (§. 64.). Ergo, quo magis a centro distat, minorem arcum *per hoc theorema* subtendit.

THEO-

THEOREMA XIV.

In eodem circulo angulus ad centrum duplus est anguli ad peripheriam, si uterque eidem arcui insistat.

71. Tripliciter fieri potest, ut angulus ad peripheriam illi arcui insistat, cui angulus ad centrum incumbit.

Primus casus.

Esto itaque primo in circulo ABC ad ipsius centrum D angulus BDC; ad peripheriam vero angulus BAC, eidem insistentes arcui BLC. Dico, angulum BDC duplum esse anguli BAC. Fig. 5. Tab. III.

Demonstratio.

Ducatur ab anguli BAC apice A per centrum D recta AL. Cum igitur duo radii DB, DA sint æquales (§. 10.), triangulum BDA erit isosceles (*Lib. V.* §. 25.). Anguli ergo DAB, DBA, qui sunt ad basim AB, erunt æquales (*Ibidem* §. 60.). Est autem angulus externus BDL æqualis duobus internis oppositis DAB, DBA (*Ibid.* 50.). Ergo, si duo DAB, DBA æquales sunt inter se, angulus BDL erit duplus utriusque. Est igitur angulus BDL duplus anguli BAL. Eodem modo ostendam, angulum quoque LDC duplum esse anguli DAC. Igitur totus BDC duplus est totius BAC (*Lib. I.* §. 144.); adeoque &c.

Secundus casus.

Angulus ad centrum sit BDC, & angulus ad peripheriam sit BZC. Dico, angulum BDC duplum esse anguli BZC.

Demonstratio.

Angulus BDC æqualis est duobus internis oppositis DZC, DCZ (*Lib. V.* §. 50.). Hi autem duo anguli æquales sunt inter se (*Ibid.* §. 60.); cum duo latera DZ, DC sint æqualia (§. 10.). Ergo angulus BDC duplus erit anguli BZC.

Tertius casus.

Angulus ad centrum sit BEC in circulo GBD, & angulus ad peripheriam sit BDC. Dico, angulum BEC duplum esse anguli BDC. Fig. 6. Tab. III.

Demonstratio.

Ducta enim a puncto D per centrum circuli E recta DG, angulus GEC duplus

duplus est anguli GDC, quemadmodum etiam angulus GEB anguli GDB, ut *ex secundo casu* est manifestum. Sublatis ergo angulis GEB, GDB, erit reliquus BEC duplus reliqui BDC (*Lib.* I. §. 148.). In eodem itaque circulo &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Mensura anguli ad peripheriam est medietas arcus, cui insistit.

72. Sic mensura anguli BAC ad peripheriam positi, est medietas arcus BLC, cui insistit. Etenim totus arcus BLC est mensura anguli ad centrum Fig. 5. Tab. III. BDC (§. 25.). Cum ergo angulus ad peripheriam BAC sit medietas anguli BDC, nonnisi medietas arcus BLC angulum ipsum BAC metietur.

COROLLARIUM II.

Omnes anguli, qui in eadem, vel æquali circuli portione consistunt, inter se sunt æquales.

Fig. 5. Tab. III. 73. Anguli nimirum BAC, BZC, qui in eadem circuli portione consistunt BAC, sunt inter se æquales. Etenim singuli sunt medietas ejusdem anguli BDC ad centrum positi, eidemque arcui insistentis BLC. Idipsum dicito de iis, qui in æqualibus circuli portionibus reperiuntur.

COROLLARIUM III.

Omnes anguli ad peripheriam positi, qui æqualibus ejusdem peripheriæ arcubus insistunt, inter se sunt æquales.

74. Videlicet si portio FHL circuli BFL æqualis fuerit portioni DBM ejusdem circuli, anguli FHL, DBM in illis portionibus contenti, erunt Fig. 7. Tab. III. inter se æquales. Si namque arcus FHL, DBM æquales sunt inter se, æquales quoque erunt arcus FBL, DHM (*Syn. Alg.* §. 166.), quibus anguli ipsi insistunt. Ergo ipsi itidem anguli FHL, DBM erunt inter se æquales (§. 74.).

THEOREMA XV.

Angulus in semicirculo consistens rectus est: qui in portione majori, acutus; & qui in minori, major est recto. Vicissim illa portio circuli est semicirculus, quæ rectum continet angulum: major semicirculo, quæ acutum; minor vero semicirculo, quæ obtusum angulum comprehendit.

I.

75. In semicirculo BAD consistat angulus BAD. Dico, angulum BAD esse rectum. *Demon-*

Demonstratio.

Ab anguli Apice A ducatur per centrum C recta ACE. Manifestum est, angulum BAC esse medietatem anguli BCE, & angulum CAD medietatem anguli ECD (§.71.), ut proinde totus angulus BAD medietas sit duorum BCE, DCE. Duo autem anguli BCE, DCE valent duos rectos (*Lib.III.*§.40.). Ergo angulus BAD unum rectum æquabit, seu erit rectus. Angulus itaque in semicirculo &c. Fig. 8. Tab.III.

II.

76. In portione BAC circuli BCA, quæ sit major semicirculo BAZ, consistat angulus BZC. Dico, ipsum esse acutum. Fig. 5. Tab.III.

Demonstratio.

A centro D ad extremum punctum C ducatur recta DC. Cum igitur angulus BDC simul cum angulo CDZ constituat summam duorum rectorum (*Lib.III.*§.40.), angulus BDC minor erit duobus rectis. Est autem angulus BZC medietas anguli BDC (§.71.). Ergo angulus BZC erit minor recto, nempe acutus; adeoque &c.

III.

77. In portione ACD circuli AOD, quæ sit minor semicirculo FAD, consistat angulus ACD. Dico, angulum ipsum esse obtusum. Fig. 9. Tab.III.

Demonstratio.

Ducatus ab ipsius anguli apice C per centrum E recta CO, junganturque extrema A, D cum centro E rectis AE, DE, quæ producatur directe in F. Cum igitur duo anguli FEO, OED valeant duos rectos (*Lib.III.*§.40.), duo AEO, OED duobus rectis majores erunt. Est autem angulus ACE medietas anguli AEO, & angulus DEC medietas anguli DEO, adeoque totus angulus ACD medietas duorum AEO, DEO (§.71.). Ergo angulus ACD major erit recto, nempe erit obtusus. Igitur &c.

IV.

78. Vicissim angulus BAD sit rectus. Dico, portionem BAD circuli ABED, quæ angulum ipsum comprehendit, esse semicirculum. Fig. 8. Tab.III.

Demonstratio.

Si namque portio BAD semicirculus non est, erit segmentum majus, vel minus semicirculo. Non est autem segmentum majus; quia tunc angulus

BAD esset acutus, ut patet ex *secunda parte* hujus. Neque est segmentum minus; quia tunc angulus BAD esset obtusus, ut liquet ex *tertia*, quod est contra hypothesim. Ergo portio BAD est semicirculus.

V.

79. Eodem modo demonstrabitur, portionem BAC circuli ABCZ, quæ angulum acutum LZC continet, esse majorem semicirculo. Portionem quoque ACD circuli AOD, quæ obtusum angulum ACD comprehendit, a semicirculo deficere. Itaque angulus in semicirculo &c. quod erat ostendendum.

Fig. 5. Fig. 9. Tab.III.

Corollarium.

80. *Angulus in portione circuli consistens eo maior est, quo minor est ipsa portio; & eo minor, quo ipsa portio est major.* Vicissim *portio circuli major est, quo minorem, & eo minor, quo majorem angulum comprehendit,*

THEOREMA XVI.

Chordæ parallelæ æquales circuli arcus intercipiunt.

Fig. 4. Tab.III. 81. In circulo FLMG sint duæ chordæ parallelæ HK, LM, arcus intercipientes HL, MK. Dico, arcus hujusmodi HL, MK esse inter se æquales.

Demonstratio.

Ducantur a centro B circuli ad illarum chordarum extrema radii BH, BL, BM, BK, junganturque extrema H, M recta HM. Manifestum est, angulum HBL duplum esse anguli HML, & angulum MBK duplum esse anguli MHK (§. 71.). Sunt autem anguli HML, MHK inter se æquales (*Lib. IV. §. 15.*); cum sint alterni, producti a recta HM incidente in parallelas HK, LM. Ergo anguli quoque HBL, MBK, erunt inter se æquales (*Lib. I. §. 127.*); cumque sint ad centrum, arcus, similiter HL, MK, quibus insistunt, erunt inter se æquales (§. 27.); Itaque chordæ parallelæ &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XVII.

Omnis quadrilateri circulo inscripti duo quicumque anguli ex adverso positi valent duos rectos.

82. Circulo AOD inscriptum habeatur quadrilaterum ABDC. Dico, duos ipsius angulos ex adverso positos ACD, ABD, quemadmodum etiam duos BAC, CDB simul sumtos, summam duorum rectorum conficere.

Demon-

Demonſtratio.

Ductis a centro E circuli ad apices angulorum A, C, D radiis EA, EC, ED, productoque in directum radio CE in O, angulus ABD erit medietas anguli AED, & angulus ACD erit medietas duorum AEO, DEO (§.71.), ut proinde duo anguli ABD, ACD medietas ſint eorum, qui circa punctum E fieri poſſunt. Anguli autem, qui fieri poſſunt circa punctum E valent quatuor rectos (*Lib. III.* §. 44.). Ergo anguli ABD, ACD duobus rectis æquales erunt. Rurſus quatuor anguli quadrilateri, ſi ipſi ſimul ſumantur, ſummam quatuor rectorum conficiunt (*Lib VI.* §. 16.). Ergo ſi duo anguli ABD, ACD quadrilateri ABDC æquales ſunt duobus rectis, reliqui itidem duo BAC, CDB duobus rectis æquales erunt. Omnis igitur quadrilateri &c. quod erat oſtendendum. Fig. 5. Tab. III.

THEOREMA XVIII.

Si recta linea circulum tangat, & a puncto contactus recta intra circulum ducatur, erunt anguli in puncto contactus producti, æquales iis, qui in alternis ipſius circuli portionibus conſiſtunt.

83. Recta linea EF tangat circulum BGD in puncto, B a quo intra ipſum circulum recta ducatur.

Primus caſus.

Et quidem primo tranſeat hujuſmodi recta per centrum X ipſius circuli, ſitque recta BA. In ſegmentis autem circuli habeantur anguli BGA, BDA. Dico, angulum EBA productum in puncto contactus B a recta tangente EF ſimul cum recta BA intra circulum ducta, æqualem eſſe angulo BDA, & angulum FBA angulo BGA, qui in alternis ipſius circuli portionibus conſiſtunt. Fig. 10. Tab. III.

Demonſtratio.

Cum enim recta BA tranſeat per centrum X circuli, atque in punctum contactus B incidat, ad perpendiculum rectæ tangenti EF incumbit (§.50.); rectique proinde erunt anguli EBA, FBA (*Lib.* III. §. 23.). Recti autem ſunt etiam anguli BGA, BDA, utpote in ſemicirculo conſiſtentes (§ 75.). Ergo angulus EBA æqualis erit angulo BDA, & angulus FBA angulo BGA (*Lib.* III. §. 37.).

Secundus caſus.

Cadat modo recta a puncto contactus B intra circulum ducta extra illius centrum X, eaque ſit recta BD. In portione autem BCD fiat angulus

 BCD,

BCD, & in portione majori BGD fiat angulus BGD. Dico, angulum FBD angulo BGD, & angulum EBD angulo BCD esse æqualem.

Demonstratio.

Ducatur a puncto contactus B per centrum X recta BA, & jungantur puncta A, D recta AD; sitque proinde inscriptum circulo BGD quadrilaterum BADC. Cum igitur angulus BDA in semicirculo consistat, rectus erit (§. 75.). Quamobrem reliqui duo anguli DBA, BAD trianguli ABD summam conficient unius recti (*Lib. V.* §. 47.). Rectus autem est angulus FBA (§. 50.). Ergo duo anguli DBA, BAD angulo FBA æquales erunt. Sublato idcirco communi angulo DBA, erit reliquus BAD reliquo FBD æqualis (*Syn. Alg.* §. 266.). Est autem angulus BGD æqualis angulo BAD (§. 73.); cum ambo in eadem circuli portione consistant. Ergo angulus quoque BGD angulum FBD æquabit (*Syn. Alg.* §. 262.). Rursus cum duo anguli BCD, BGD quadrilateri BGDC valeant duos rectos (§. 82.), duobus EBD, FBD, qui itidem valent duos rectos (*Lib.* III. § 40.), æquales erunt (*Syn. Alg.* §. 261.). Ostensum est autem, angulum FBD æqualem esse angulo BGD. Ergo reliquus EBD reliquo BCD erit æqualis (*Ibid.* §. 266.). Itaque si recta linea circulum tangat &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Si duæ rectæ lineæ ab eodem puncto ductæ circulum tangant, & puncta contactus recta jungantur, anguli in punctis contactus producti erunt æquales.

84. Ut si a puncto D ducantur duæ rectæ DE, DF circulum ABC tangentes in duobus punctis A, C, ipsaque puncta A, C jungantur recta AC, anguli DAC, DCA erunt æquales, quemadmodum etiam anguli EAC, FCA. Etenim uterque angulus DAC, DCA æqualis est angulo ABC in alterna circuli portione constituto *per hoc theorema*. Ergo ipsi anguli DAC, DCA erunt inter se æquales (*Syn. Alg.* §. 259.). Rursus cum tam duo DAC, EAC, quam duo DCA, FCA valeant duos rectos (*Lib. III.* §. 40.), erunt duo DAC, EAC duobus DCA, FCA æquales (*Syn. Alg.* §. 259.). Sublatis ergo æqualibus DAC, DCA, reliquus EAC reliquo FCA æqualis erit (*Ibid.* § 266.); adeoque &c.

Fig. 11. Tab. III.

COROLLARIUM II.

Duæ rectæ circulum tangentes, si ab eodem puncto ductæ fuerint, erunt inter se æquales.

Fig. 11. Tab. III. 85. Nimirum duæ DA, DC ductæ ab eodem puncto D, circulumque ABC tangentes in punctis A, C, erunt inter se æquales. Etenim ducta per puncta contactus recta AC, anguli DAC, DCA erunt æquales (§. 84.). Ergo latera quoque DA, DC trianguli DAC erunt inter se æqualia (*Lib. V.* § 65.); ac proinde &c.

THEO-

THEOREMA XIX.

Si in circulo punctum aliquod accipiatur a centro circuli diversum, & ab eo quamplures rectæ in peripheriam ducantur, illa erit omnium maxima, quæ per circuli centrum transit: minima illius complementum. Aliarum vero proximior maximæ remotiore major erit. Duæ porro dumtaxat inter se æquales ab illo puncto in peripheriam cadere possunt.

In circulo ACGH punctum F accipiatur diversum a centro E ipsius circuli. Ab illo autem ducantur ad peripheriam circuli quamplures rectæ lineæ FA, FB, FC, FG, quarum FA per centrum E ipsius circuli transeat, eaque directe producatur in D.

I.

86. Dico primo, rectam FA per circuli centrum E transeuntem, esse omnium aliarum maximam.

Demonstratio.

Junctis punctis E, B radio EB, cum duæ EA, EB sint æquales (§. 10.), utpote radii ejusdem circuli, addita communi EF, erunt duæ BE, EF rectæ AF æquales (*Syn Alg.* §. 265.). Duæ autem BE, EF majores sunt recta BF (*Lib.V.* §. 69.). Duæ autem BE, EF majores sunt recta BF (*Lib. V.* §. 69.). Ergo recta quoque AF rectam BF superabit (*Syn. Alg.* §. 264.). Eodem modo ostendam rectam AF majorem esse recta CF, iisque omnibus, quæ a puncto F in circuli peripheriam AGH cadere possunt. Est itaque recta FA harum omnium maxima. Fig.12. Tab.III

II.

87. Dico secundo, complementum FD maximæ FA esse omnium minimam.

Demonstratio.

A centro E ad punctum G ducatur radius EG. Cum igitur duæ EF, FG majores sint reliqua EG (*Lib. V.* §. 69.), sitque recta EG rectæ ED æqualis (§. 10.), duæ EF, FG recta quoque ED majores erunt (*Syn. Alg.* §. 264.). Sublata propterea communi EF, erit reliqua FG major reliqua FD (*ibid.* §. 269.). Idipsum eodem modo de ceteris FC, FB demonstrabitur. Recta igitur FD est omnium minima.

III.

88. Dico tertio, rectam FB proximiorem maximæ FA majorem esse remotiore FC.

Demon-

Demonstratio.

Ducatur radius EC. Itaque cum duæ EB, EC sint æquales (§. 10.), & recta EF sit communis utrique triangulo BEF, CEF, duo triangula BEF, CEF, habebunt duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri. Est autem angulus BEF major angulo CEF (*Syn. Alg.* §. 257.). Ergo basis quoque BF base CF major erit (*Lib. V.* §. 95.). Eadem ratione recta CF major erit recta GF, atque ita de ceteris.

IV.

89. Dico quarto, binas tantum rectas inter se æquales a puncto F in peripheriam cadere posse.

Demonstratio.

Sumatur arcus DH æqualis arcui DG, & ducantur rectæ EG, EH. Cum ergo arcus GD, DH sint æquales, æquales itidem erunt anguli DEH, GED (§. 27.). Æqualia sunt autem etiam duo latera EG, EH triangulorum GEF, FEH (§. 10.), & latus EF est utrique triangulo commune. Ergo bases quoque GF, FH æquales erunt (*Lib. V.* §. 73.). Duæ itaque æquales rectæ cadere possunt a puncto F in peripheriam AGH. Quod autem tantum duæ, ex eo ostenditur, quod tertia linea esset vel proximior maximæ FA, vel ab ea remotior, quam sint duæ FG, FH, ut patet. Ergo esset major, vel minor ipsis FG, FH, ut ex §. 88. est manifestum. Duæ igitur tantummodo inter se æquales a puncto F in peripheriam duci queunt. Si ergo in circulo punctum &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Punctum in area circuli, a quo tres rectæ æquales in peripheriam cadunt, est centrum ipsius circuli.

90. Ut si tres rectæ EB, EC, EG fuerint inter se æquales punctum E erit centrum circuli AGH. Neque enim a puncto, quod non sit centrum circuli, tres rectæ inter se æquales in illius peripheriam cadere possunt (§. 89.).

COROLLARIUM II.

Si in circulo duæ rectæ æquales sese mutuo bifariam dividant, punctum sectionis erit centrum illius circuli.

91. Hoc enim ipso tres rectæ inter se æquales ab illo puncto in ipsius circuli peripheriam cadunt.

THEO-

THEOREMA XX.

Si extra circulum punctum aliquod sumatur, a quo in ipsum circulum plures recta ducantur, earum, quæ in concavam ipsius circuli peripheriam cadunt, maxima est, quæ per centrum transit: aliarum vero proximior maximæ remotiore major est. At earum, quæ in convexam cadunt peripheriam, minima est illa, quæ inter datum punctum, & circuli diametrum directe jacet; aliarum vero, quæ est minimæ proximior remotiore minor est. Duæ postremo dumtaxat inter se æquales ab illo puncto in ipsum circulum cadere possunt.

Extra circulum ZDN sumatur punctum A, a quo in ipsum circulum quamplures rectæ ducantur AD, AK, AZ, ex quibus recta AZ per ipsius circuli centrum P transeat.

I.

92. Dico primo, rectarum AD, AZ, AK, quæ in concavam ipsius circuli peripheriam cadunt; maximam esse rectam AZ, quæ per centrum P transit. Fig 13. Tab.III.

Demonstratio.

Ducatur ad punctum K radius PK. Duæ itaque PK, PZ erunt inter se æquales (§. 10.). Quamobrem addita utrique recta PA, erunt duæ KP, PA simul sumtæ æquales rectæ ZA (*Syn. Alg.* §. 265.). Duæ autem KP, PA majores sunt recta KA (*Lib. V.* §. 69.). Ergo recta quoque ZA ipsam KA superabit (*Syn. Alg.* §. 264.). Eodem modo demonstrabitur, rectam AZ majorem esse recta AD, iisque omnibus, quæ in concavam ipsius circuli peripheriam cadere possunt. Est ergo recta AZ omnium maxima.

II.

93. Dico secundo, rectam AK proximiorem maximæ AZ majorem esse remotiore AD.

Demonstratio.

Ducto radio PD, cum duæ PK, PD sint æquales (§. 10.), & recta PA communis utrique triangulo KPA, DPA, duo ipsa triangula duo latera duobus lateribus æqualia habebunt, alterum alteri. Est autem angulus KPA major angulo DPA (*Syn. Alg.* §. 257.). Ergo basis quoque KA base DA major erit (*Lib. V.* §. 95.).

III.

III.

94. Dico tertio, rectarum AC, AO, AX, quæ cadunt in convexam peripheriam, minimam esse rectam AC, quæ directe jacet inter datum punctum A, & diametrum CZ.

Demonstratio.

Ducto radio PO, duæ PO, OA majores erunt recta PA (*Lib. V.* §. 69.). Duæ autem PO, PC sunt inter se æquales (§. 10.). Ergo illis sublatis, reliqua OA major erit reliqua CA (*Syn. Alg.* §. 269.). Eodem modo ostendam, rectam XA superare eandem CA. Est itaque recta CA omnium minima.

IV.

95. Dico quarto, rectam OA proximiorem minimæ CA minorem esse remotiore XA.

Demonstratio.

A centro P ad punctum X ducatur radius PX. Evidens est, duo latera PX, XA trianguli PXA majora esse duobus lateribus PO, OA trianguli POA (*Lib. V.* §. 72.). Duo autem PX, PO sunt æqualia (§. 10.). Ergo illis sublatis, reliquum XA majus erit reliquo OA (*Syn. Alg.* §. 269.).

V.

96. Postremo dico; duas tantum inter se æquales a puncto A in circulum ipsum XZN cadere posse.

Demonstratio.

Sumatur arcus CN æqualis arcui CO, & ducatur radius PN, necnon recta NA. Quoniam igitur arcus CN, CO sunt æquales, æquales itidem erunt anguli NPC, CPO (§. 27.). Sunt autem æqualia etiam latera PO, PN (§. 10.), & latus PA est commune utrique triangulo APO, APN. Ergo basis quoque NA basi AO æqualis erit (*Lib. V.* §. 73.). Eodem modo ostendam, duas rectas æquale cadere posse ab eodem puncto A in concavam ejusdem circuli peripheriam. Quod autem nonnisi duæ hujusmodi rectæ esse possint, patet ex iis, quæ modo demonstravimus. Etenim altera recta cadens in convexam peripheriam, vel esset proximior minimæ CA, & ideo minor, quam duæ datæ; vel ab ea remotior, & ideo major illis. Similiter altera recta in concavam cadens peripheriam, vel esset proximior maximæ AZ, quam illæ sint, & ideo esset illis major; vel esset ab ea remotior, & sic

ab

ab illis duabus deficeret. Itaque duæ tantum inter se æquales cadere possunt a puncto A in ipsum circulum XZN; ac proinde si extra circulum &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XXI.

Radius circuli sextam peripheriæ partem subtendit.

97. Recta FH in circulo DHM sit æqualis radio AH ejusdem circuli. Dico, arcum FH, cui ipsa recta FH subtenditur, æquare sextam partem peripheriæ DHM ipsius circuli. Fig. 7. Tab. III.

Demonstratio.

Ducatur ad extremum F radius AF. Cum igitur tres rectæ AF, FH, HA sint æquales (§ 10.), triangulum HAF erit æquilaterum (*Lib. V.* §. 24.), adeoque æquiangulum (*ibid.* §. 62.); ac proinde angulus FAH erit tertia pars duorum rectorum, sive sexta pars quatuor rectorum (*Ibid.* §. 43.). Est autem arcus FH ad totam peripheriam DHM, ut angulus FAH ad quatuor rectos (§. 28.). Ergo arcus FH erit sexta pars totius peripheriæ DHM. Radius itaque circuli &c. quod erat ostendendum.

SCHOLION.

98. Cum igitur quævis *circini* apertura æqualis sit radio circuli ea descripti, manifestum est, quam recte *circinus* Italice *il sesto* vocetur. Sextam quippe peripheriæ partem subtendit.

THEOREMA XXII.

Si duæ rectæ parallelæ circulum tangant, & per puncta contactus recta ducatur, transibit illa per centrum ipsius circuli.

99. Duæ rectæ lineæ EF, MN circulum tangant BGD in punctis B, A, sintque rectæ EF, MN inter se parallelæ. Per puncta autem contactus B, A ducatur recta BA. Dico, rectam hujusmodi transire per centrum ipsius circuli. Fig. 10. Tab. III.

Demonstratio.

Cum enim per hypothesim rectæ EF, MN sint parallelæ, æquales erunt anguli alterni EBA, BAN (*Lib. IV.* §. 15.). Est autem angulus EBA æqualis angulo BDA posito in alterna circuli portione BDA, quemadmodum etiam angulus BAN angulo BGA in alterna itidem circuli portione BGA existenti (§. 83.). Ergo duo itidem anguli BDA, BGA inter se mutuo æquales erunt. Manifestum est autem, duos angulos BDA, BGA valere duos

duos rectos (§. 82.); cum sint oppositi in quadrilatero BGAD circulo BGD inscripto. Ergo uterque BDA, BGA erit rectus; ac proinde circuli portiones BDA, BGA erunt semirculi (§. 78.). Determinantur autem a recta BA. Ergo recta BA per centrum transit circuli BGD. Est enim ipsius circuli diameter. Itaque si duæ rectæ &c. quod erat ostendendum.

S C H O L I O N.

100. Ostensa rectitudine anguli BDA, aliter demonstrari potest; rectam BA transire per centrum circuli BGD. Cum enim angulus EBA sit æqualis angulo BDA, si angulus BDA est rectus, rectus quoque erit angulus EBA. Duo autem anguli EBA, FBA valent duos rectos (*Lib.* III. §. 40.). Ergo uterque erit rectus. Quamobrem recta BA ad perpendiculum incumbet tangenti EF (*Ibid.* §. 24.); atque ideo transibit per centrum ipsius circuli DGB (§. 58.).

THEOREMA XXIII.

Si duæ rectæ lineæ ex eodem puncto ductæ circulum tangant, & per puncta contactus recta ducatur, transibit illa extra centrum ipsius circuli.

Fig. 11. Tab. III. 101. Extra circulum ABC sumatur punctum D, a quo in ipsum circulum ducantur duæ rectæ tangentes DA, DC. Per puncta autem contactus A, C transeat recta AC. Dico, rectam hujusmodi cadere extra centum ipsius circuli.

Demonstratio.

Cum enim duo anguli DAC, DCA æquales sint inter se (§. 84.), sintque ambo simul sumti minores duobus rectis (*Lib. V.* §. 42.), uterque erit acutus. Est autem angulus ACD æqualis angulo ABC, qui fit in alterna portione ABC (§. 83.). Ergo angulus quoque ABC erit acutus; ac proinde portio ABC circuli ACB major erit semicirculo (§. 79.). Determinatur autem a recta AC. Ergo recta AC inæqualiter circulum dividit ACB, ac proinde extra ipsius circuli centrum cadit. Itaque si duæ rectæ lineæ &c. quod erat ostendendum.



ELE.

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM

LIBER VIII.

De planorum sectione, & situ.

De *planorum sectione* & *situ* nonnulla hic exhibemus, quæ magis scitu necessaria reputamus; ex *lib. XI. Elementorum* Euclidis præsertim desumta.

DEFINITIO I.

1. *Planum*, sive *plana superficies ea est*, *quæ suis ex æquo interiicitur extremis*, seu quæ est hujusmodi, ut duo ipsius puncta simul recta linea jungi nequeant, quin tota in ipsa superficie consistat. Vide quæ diximus de *linea recta* ex Platone (*Lib. III. §. 5.*).

DEFINITIO II.

2. *Illa recta linea dicitur plano ad perpendiculum incumbere*, *quæ perpendicularis est rectis omnibus*, *quæ in ipso plano per illud punctum duci queunt*. Sic recta FE perpendicularis erit plano ABCD, si perpendicularis fuerit rectis AC, BD, omnibusque aliis ductis in ipso plano per punctum E. Fig. 14. Tab. III.

DEFINITIO III.

3. *Recta ad planum inclinata*, *seu oblique plano insistens*, *est illa*, *quæ cum una rectarum in ipso plano per illud punctum*, *cui illa incumbit*, *traducta angulum acutum constituit*. Ut si angulus GEH, quem recta GE efficit in puncto E cum recta EH, fuerit acutus, recta GE erit ad planum ABCD inclinata.

DEFINITIO IV.

4. *Angulus inclinationis lineæ rectæ ad planum est angulus ille acutus*, *quem recta ipsi plano inclinata cum altera in plano ducta constituit*. Sic angulus GEH est *angulus inclinationis* rectæ GE ad planum ABCD. Fig. 14. Tab. III.

SCHOLION.

5. Ut determinetur *angulus inclinationis* lineæ rectæ ad planum, ducenda est

Fig.14. Tab.III. est recta perpendicularis ab uno sublimi ipsius rectæ puncto ad ipsum planum, simulque recta linea jungenda sunt illa plani puncta, quibus hujusmodi rectæ insistunt. Sic ducta e puncto G ad planum ABCD recta perpendicularis GH, junctisque punctis E, H recta EH, ita ut fiat triangulum GEH, angulus acutus GEH erit *angulus inclinationis* rectæ lineæ GE ad ad planum ABCD.

DEFINITIO V.

Fig.15. Tab.III. 6. *Communis sectio duorum planorum est illa linea, quæ utrique plano est communis*. Ut si planum EFGH, secet planum ACDB, sitque linea FG utrique plano communis, hæc erit communis sectio planorum EFGH, ACDB.

DEFINITIO VI.

7. *Illud planum dicitur alteri ad perpendiculum incumbere, quod ita illi insistit, ut non magis in unam, quam in alteram illius partem inclinet*. Ut si planum EHGF ita incumbat plano ACDB, ut non magis inclinet in partem D, quam in partem C, planum EHGF ad perpendiculum insistet plano ACDB.

COROLLARIUM.

8. *Omnes rectæ ductæ in plano, quod alteri ad perpendiculum incumbit, communique eorum sectioni perpendiculariter insistentes, perpendiculares sunt plano, cui illud insistit*. Rectæ nimirum *ab*, *cd* ductæ in plano EHGF, & communi eorum sectioni GF perpendiculares, plano quoque ACDB sunt perpendiculares. Etenim si secus, planum EHGF plano ACDB ad perpendiculum minime incumberet.

DEFINITIO VII.

Fig.16. Tab.III. 9. *Unum planum dicitur alteri oblique insistens, cum ita illi incumbit, ut magis in unam, quam in alteram illius partem inclinet*. Sic planum FEGH dicitur oblique incumbens plano ABCD, quia magis tendit in partem C, quam in partem B ipsius plani ABCD.

DEFINITIO VIII.

Fig.16. Tab.III. 10. *Angulus inclinationis plani ad planum est angulus, quem efficiunt rectæ, quarum una in uno, altera in altero plano reperitur, & communi sectioni perpendiculariter insistunt*. Sic *angulus inclinationis* plani FEGH ad planum ABCD erit angulus *abd*, quem efficiunt rectæ *ab*, *bd* ductæ in ipsis planis, communique eorum sectioni GE perpendiculares.

Co-

COROLLARIUM.

11. *Arcus circuli, quo determinatur quantitas anguli* abd *inclinationis plani* FEGH *ad planum* ABCD, *definit magnitudinem inclinationis plani* FEGH *ad planum* ABCD. Fig. 16. Tab. III.

DEFINITIO IX.

12. *Illa plana vocantur parallela, quæ æqualiter ubique inter se distant.* Hujusmodi sunt plana ABCD, EFGH. Contra vero *illa non sunt parallela, quorum distantia a se mutuo eadem ubique non est.* Vide quæ diximus de *lineis parallelis, & non parallelis.* Fig. 17. Tab. III.

COROLLARIUM.

13. *Plana parallela licet in infinitum directe producantur, nunquam se mutuo secare possunt.* Sectio namque fieri nequit, nisi ad se mutuo continuo magis accedant, ac proinde nisi eorum distantiæ sint inæquales.

THEOREMA I.

Ex eodem plani puncto una tantum recta ipsi plano perpendicularis ad eandem partem excitari potest.

14. In plano ABCD sumatur punctum E, ex quo excitetur recta EF plano ABCD ad perpendiculum incumbens. Dico, ex eodem puncto E ad eandem partem F alteram rectam excitari non posse, quæ sit ipsi plano perpendicularis.

Demonstratio.

Si fieri potest, sit altera perpendicularis EG. Cum igitur utraque recta EF, EG debeat ad perpendiculum incumbere omnibus rectis, quæ in ipso plano per punctum E duci possunt (§. 2.), utraque EG, EF erit eidem rectæ, nimirum EH, perpendicularis. Hoc autem manifeste repugnat (*Lib. III. §. 50.*) Ergo recta EG non est plano ABCD perpendicularis, & eadem ratione nulla alia, nisi recta EF. Ex eodem itaque plani puncto &c. quod erat ostendendum. Fig. 14. Tab. III.

THEOREMA II.

Ex puncto extra planum sumto una tantum recta perpendicularis in ipsum planum cadere potest.

15. Extra planum ABCD sumatur punctum G, ex quo in ipsum pla-

num cadat recta perpendicularis GH. Dico, ex eodem puncto G cadere non posse alteram rectam perpendicularem in ipsum planum.

Demonstratio.

Etenim, si id potest fieri, sit altera recta GE plano ABCD ad perpendiculum incumbens. Ducatur autem a puncto E ad punctum H in ipso plano recta EH. Cum ergo utraque GH, GE insistat plano ABCD ad
Fig. 14. perpendiculum, utraque perpendicularis erit eidem rectæ EH (§. 2.). Id
Tab.III. autem contingere nequit (*Lib. V* §. 49.). Ergo recta GE non est plano ABCD perpendicularis. Ex eodem itaque puncto &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA III.

Recta perpendicularis minima est omnium rectarum, quæ ex eodem puncto in ipsum planum cadere possunt.

16. Ex puncto G sumto extra planum ABCD cadat in ipsum planum
Fig. 14. recta perpendicularis GH. Dico, hanc esse minimam omnium, quæ a pun-
Tab.III. cto G in ipsum planum ABC cadere possunt.

Demonstratio.

Ducatur in ipso plano per punctum H recta *ab*. Evidens est, rectam GH esse minimam omnium rectarum, quæ a puncto G in ipsam *ab* duci queunt (*Lib. III.* § 57.); cum recta GH sit ipsi *ab* perpendicularis (§. 2.). Eadem ratione, ducta alia quacumque linea per punctum H in ipso plano, recta GH, utpote illi ad perpendiculum incumbens (§. 2.), erit omnium, quæ in illam ex eodem puncto G cadere possunt, minima. Recta igitur GH est minima omnium, quæ a puncto G in planum ABCD cadere queunt; adeoque recta perpendicularis &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA IV.

Si una recta linea quoad unam sui partem cum plano coincidat, quoad omnes suas partes in eodem erit.

17. Pars *a*E rectæ alicujus lineæ coincidat cum plano ABCD, nempe in ipso plano reperiatur. Dico, hujusmodi rectam quoad omnes suas partes in ipso plano reperiri, sive cum illo coincidere.

Demonstratio.

Quandoquidem, si fieri potest, una pars illius rectæ lineæ extra planum tendat, sitque pars EG. Certum est, extremum punctum E partis *a*E re-
cto

cto tramite moveri posse super planum ABCD, suoque recto fluxu lineam rectam describere E*b*, unam eandemque rectam constituentem cum parte, five segmento *a*E. Ergo, cum linea *a*EG posita sit recta, duæ rectæ *a*EG, *a*E*b* habebunt commune segmentum *a*E. Id autem plane repugnat (*Lib. III.* §. 48.) Ergo una pars rectæ lineæ nequit eum plano coincidere, & altera in sublimi extra illud tendere, quod erat ostendendum. Fig. 14. Tab. III.

THEOREMA V.

Duæ rectæ lineæ parallelæ, quemadmodum etiam duæ concurrentes, in puncto, atque in illo sese mutuo secantes, in eodem plano reperiuntur.

I.

18. Sint duæ rectæ parallelæ AB, CD. Dico, illas in eodem plano consistere.

Demonstratio.

Potest recta CD recto tramite moveri, & tendere in rectam AB, ut illi tandem congruat, quin earum parallelismus turbetur. Atqui recta CD hujusmodi motu planam superficiem describet (§. 1.); cum omnes lineæ *ab*, *cd*, *ef*, *gh* &c. ex hoc motu productæ, in eademque superficie consistentes, sint rectæ. Ergo rectæ parallelæ AB, CD in eodem plano reperiuntur. Fig. 22. Tab. I.

II.

19. Duæ rectæ lineæ AE, CE simul concurrant in puncto E. Duæ quoque AB, CD in illo sese mutuo dividant. Dico, tam duas AE, CE, quam duas AB, CD in eodem plano consistere.

Demonstratio.

Etenim potest recta AB eo tramite sic moveri circa punctum E, ut congruant rectæ CD, & plana superficies ex hoc mutu consurgat. Ergo tam duæ rectæ AE, CE, quam duæ AB, CD in eodem plano consistunt. Duæ itaque rectæ &c. quod erat ostendendum. Fig. 14. Tab. I.

THEOREMA VI.

Duæ rectæ lineæ eidem plano ad perpendiculum incumbentes, sunt inter se parallelæ.

20. Plano ABCD ad perpendiculum incumbant duæ rectæ FE, GH. Dico, rectas FE, GH esse inter se parallelas.

Demonstratio.

Fig. 14. Tab. III. Ducatur in ipso plano a puncto E ad punctum H recta EH. Cum igitur utraque FE, GH ad perpendiculum incumbat plano ABCD, utraque perpendicularis erit rectæ EH (§. 2.), quæ in ipso plano ducta est. Igitur rectus erit uterque angulus FEH, GHE (*Lib. III. §. 23.*). Sunt autem duo hujusmodi anguli interni ad easdem partes, & ipsæ rectæ FE, GH in eodem plano consistunt. Ergo duæ FE, GH sunt inter se parallelæ (*Lib. IV. §. 9.*). Duæ itaque rectæ lineæ &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA VII.

Si una duarum parallelarum fuerit plano perpendicularis, altera quoque eidem plano perpendicularis erit.

21. Sint duæ rectæ parallelæ FE, GH. Harum autem una FE plano ABCD ad perpendiculum insistat. Dico, alteram quoque GH eidem plano ABCD perpendicularem esse.

Demonstratio.

Fig. 14. Tab. III. Moveatur recta GH super planum ABCD ea ratione, ut illi semper insistat, eandemque ad illud inclinationem retineat, pergatque versus rectam FE. Evidens est, congruentibus simul punctis earum extremis H, E, totam GH toti FE congruere deberé. Quandoquidem, si secus res contingeret, duæ rectæ FE, GH non essent parallelæ, contra hypothesim, utpote in puncto concurrentes, sicuti duæ FE, GE. Congruet ergo tota GH toti FE. Ergo sicuti recta FE perpendicularis est plano ABCD, ita recta GH eidem plano perpendicularis erit; ac proinde. si una &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA VIII.

Si duæ rectæ in plano ductæ sese in puncto secuerint, ex quo erigatur recta duabus illis perpendicularis, hæc quoque ipsi plano ad perpendiculum incumbet.

22. In plano ABCD ducantur duæ rectæ AC, BD, quæ sese mutuo quomodocumque secent in puncto E. Ex hoc autem sectionis puncto erigatur recta FE, quæ sit utrique AC, BD perpendicularis. Dico, rectam FE plano quoque ABCD, ad perpendiculum insistere.

De-

Demonstratio.

Etenim potest recta AC sic moveri super planum ABCD circa punctum E, ut tota semper in illo sit, & rectæ BD plane congruat, quin recta FE unquam desinat ad perpendiculum rectæ rotanti AC incumbere. Ergo recta EF perpendicularis est toti plano ABCD (§. 2.), utpote ad perpendiculum insistens omnibus rectis, quæ in ipso plano per punctum E duci possunt. Igitur si duæ rectæ in plano &c. quod erat ostendendum. Fig. 14. Tab. III.

THEOREMA IX.

Si in plano describatur circulus, ex cujus centro erigatur recta ipsi plano perpendicularis, æquales erunt omnes rectæ, quæ ex puncto in illa sumto in peripheriam ipsius circuli cadere possunt.

23. In plano ABCD describatur circulus GH, ex cujus centro F erigatur recta FE ipsi plano ABCD perpendicularis. Ex puncto autem E sumto in ipsa recta cadant in peripheriam descripti circuli quamplures rectæ EH, EG &c. Dico, has omnes esse inter se æquales. Fig. 18. Tab. III.

Demonstratio.

Cum enim recta EF sit ex hypothesi perpendicularis plano ABCD, perpendicularis itidem erit utrique rectæ FG, FH (§. 2.). Quamobrem anguli EFG, EFH erunt recti (*Lib. III. §.* 23.); adeoque inter se æquales (*ibid. §.* 37.). Æquales sunt autem etiam rectæ FG, FH (*ibid. §.* 10.), & recta EF est utrique triangulo EFG, EFH communis. Ergo basis quoque EG basi EH æqualis erit (*Lib. V. §.* 73.). Igitur si in plano &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA X.

Si duo plana se mutuo secuerint, communis eorum sectio est recta linea.

24. Duo plana ABCD, EFGH se mutuo secent, eorumque communis sectio sit KL. Dico, hujusmodi sectionem esse lineam rectam.

Demonstratio.

Quod sectio hujusmodi sit linea ex eo patet, quod plana se mutuo secantia, longitudine duntaxat, & latitudine gaudeant. Non sunt enim nisi superficies. Quod vero linea sectionis KL sit recta, sic ostenditur. Certum siquidem est, punctum K commune esse utrique plano ABD, FEH, quemadmodum etiam punctum L. Rectæ siquidem lineæ quibus ipsa plana terminantur, nonnisi in punctis K, L sese mutuo secare possunt. Certum Fig. 19. Tab. III.

 est

est etiam, a quovis puncto ad quodvis punctum in utroque plano sumto rectam lineam duci posse (*Lib. III. §. 29.*). Igitur si linea KL non est recta, hæc non impediet, quo minus in utroque plano duci possit recta a puncto K ad punctum L, quæ sunt utrique plano communia; cum hujusmodi plana nihil aliud commune habeant, nisi lineam sectionis KL. Sit ergo in plano ABD linea recta K*b*L, & in plano FEH linea recta K*a*L. Duæ igitur rectæ K*b*L, K*a*L spatium concludunt. Habent enim extrema communia K, L. Repugnat autem duas rectas spatium concludere (*Lib. IV. §. 7.*). Ergo neutra linearum K*b*L, K*a*L est recta; ac proinde duci neutiquam potest recta linea a puncto K ad punctum L, quin sit communis utrique plano ABD, FEH. Nequit autem hujusmodi recta esse communis utrique plano, nisi quatenus, sit communis illorum sectio, ut patet. Ergo sectio KL planorum ABD, FEH est linea recta; adeoque si duo plana &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XI.

Duo plana, quibus eadem recta linea simul ad perpendiculum insistit, sunt parallela.

25. Duobus planis ABCD, EFGH simul ad perpendiculum insistat eadem recta *af*. Dico, plana ABCD, EFGH esse inter se parallela.

Demonstratio.

Per punctum *a* in plano ABCD ducatur recta *bd*, & per punctum *f* ducatur in plano EFGH recta *eg*; sintque duæ *bd*, *eg* in eodem plano. Non enim repugnat, ut idem planum transeat per puncta *a*, *f*, & utrumque secet planum ABCD, EFGH, eorumque sectiones sint rectæ *bd*, *eg* (§. 24.). Cum igitur recta *fa* ad perpendiculum insistat plano ABCD, perpendicularis itidem erit rectæ *bd* (§. 2.); rectusque idcirco erit angulus *daf* (*Lib. III. §. 23.*). Eandem ob causam rectus erit etiam angulus *afg*. Sunt autem duo anguli *daf*, *afg* interni ad easdem partes, ut patet. Ergo duæ rectæ *bd*, *eg* erunt parallelæ (*Lib. IV. §. 9.*). Eodem modo ostendam, parallelas itidem esse duas rectas *mn*, *hk*, omnesque alias, quæ ab eodem plano per puncta *a*, *f*, transeunte, duoque plana ABCD, EFGH secante, in ipsis planis designari possunt. Sunt autem omnes hujusmodi rectæ parallelæ in ipsis planis ABCD, EFGH. Ergo hujusmodi itidem plana sunt inter se parallela. Duo igitur plana &c. quod erat ostendendum.

Fig. 17. Tab. III.

THEOREMA XII.

Si duo plana parallela eodem plano secta fuerint, eorum sectiones erunt parallelæ.

26. Si duo plana ABCD, EFGH parallela sint inter se, eodemque plano secentur, sintque eorum sectiones duæ rectæ *bd*, *eg*. Dico, rectas hujusmodi *bd*, *eg* esse inter se parallelas.

Demon-

Demonstratio.

Si namque duæ *bd*, *eg* parallelæ non sunt inter se, si ad eandem partem directe producantur, sibi mutuo continuo accedent (*Lib. IV. §. 5.*). Sunt autem hujusmodi rectæ in planis ABCD, EFGH. Ergo, si plana ipsa simul cum illis rectis in directum producta fuerint, proximiora sibi mutuo continuo fient; ac proinde non erunt inter se parallela (§. 12.). Hoc autem est contra hypothesim. Ergo rectæ *bd*, *eg* sunt parallelæ. Itaque si duo plana parallela &c. quod erat ostendendum. Fig. 17. Tab. III.

THEOREMA XIII.

Si duo plana se invicem secantia eidem plano ad perpendiculum institerint, communis quoque eorum sectio eidem plano perpendicularis erit.

27. Duo plana se mutuo secantia ABCD, EFGH ad perpendiculum incumbant plano MN, sitque communis eorum sectio recta KL. Dico, rectam quoque KL plano MN ad perpendiculum incumbere.

Demonstratio.

Si namque recta KL, quæ communis est utrique plano ABCD, EFGH, utpote communis eorum sectio, plano MN ad perpendiculum non incumbit, perpendicularis non erit rectæ GL, neque rectæ LC, secundum quas plana ipsa ABCD, EFGH planum MN secant. Neque enim potest recta KL ad perpendiculum insistere rectis GL, LC, quin perpendicularis itidem sit ipsi plano MN (§. 22.), in quo rectæ GL, LC reperiuntur. Certum est autem, posse ex puncto L erigi in plano ABCD rectam, quæ sit ejus basi LC perpendicularis, sicuti alteram in plano EFGH ex eodem puncto L, quæ illius itidem basi GL perpendiculariter incumbat. Sint ergo hujusmodi rectæ perpendiculares L*n*, L*m*. Igitur duæ rectæ L*m*, L*n* educi possunt ex eodem puncto L, quæ sint perpendiculares eidem plano MN. Non enim potest recta L*n* esse perpendicularis basi LC plani ABCD, & recta L*m* perpendiculariter insistere basi GL plani EFGH, quin utraque L*n*, L*m* perpendicularis itidem sit plano MN (§. 8.); cum ex hypothesi utrumque planum ABCD, EFGH plano MN ad perpendiculum incumbat. Repugnat autem, duas L*m*, L*n* simul perpendiculares esse plano MN (§. 14.). Ergo non alia recta educta ex puncto L erit plano MN perpendicularis, nisi communis sectio LK. Igitur si duo plana se invicem secantia &c. quod erat ostendendum. Fig. 19. Tab. III.

THEOREMA XIV.

Si duo plana parallela fuerint, recta linea uni eorum perpendicularis, alteri quoque perpendicularis erit.

28. Sint duo plana inter se parallela ABCD, EFGH. Uni autem eorum

Fig. 17. Tab. III. ABCD ad perpendiculum incumbat recta *af*. Dico, rectam *af* alteri quoque EFGH esse perpendicularem.

Demonstratio.

Per puncta *af* ducatur planum, eoque secentur duo ipsa plana ABCD, EFGH, ita ut ipsorum sectiones sint rectæ *mn*, *b*K. Quoniam igitur duo plana ABCD, EFGH posita sunt parallela, sectiones quoque *mn*, *b*K erunt parallelæ (§. 26.). Est autem recta *af* perpendicularis rectæ *mn* (§. 2.), cum posita sit ad perpendiculum plano ABCD incumbere. Ergo rectæ quoque *b*K ipsa *af* perpendicularis erit (*Lib. IV. §. 16.*). Eodem modo ostendam, ipsam *af* perpendiculariter insistere rectis omnibus, quæ in plano EFGH per punctum *f* duci possunt. Ergo recta *af* est plano EFGH perpendicularis (§. 2.). Itaque si duo plana &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA XV.

Inclinatio duorum planorum est ubique eadem.

29. Planum FEG insistat plano ABCD Dico, eandem ubique esse inclinationem plani FBG ad planum ABCD.

Demonstratio.

Communis sectio illorum planorum sit recta EG, in qua sumtis punctis E, *b*, ducantur rectæ *ba*, EF in plano FEG, rectæ EG perpendiculares, Fig. 16. Tab. III. & in plano ABCD rectæ *bd*, ED, perpendiculares quoque eidem EG. Tum fiant rectæ EF, *ba* æquales inter se, ficuti etiam rectæ *bd*, ED, & ducantur rectæ *a*F, *d*D. Quoniam igitur rectæ FE, *ab* perpendiculares sunt eidem EG, anguli interni FE*b*, E*ba* erunt recti (*Lib. III. §. 23.*), ac proinde parallelæ ipsæ rectæ EF, *ba* (*Lib. IV. §. 9.*). Duæ autem EF, *ba* positæ sunt æquales. Ergo duæ quoque E*b*, F*a* inter se æquales (*Lib. V. §. 75.*), & parallelæ erunt (*Ibid. §. 88.*). Eodem modo ostendam, duas quoque E*b*, D*d* æquales esse, & parallelas. Igitur duæ F*a*, D*d* æquales sunt, & parallelæ eidem E*b*; ac proinde inter se quoque sunt æquales, & parallelæ (*Lib. IV. §. 17.*). Quamobrem si earum extrema jungantur rectis FD, *ad*, hæ similiter erunt æquales (*Lib. V. §. 75.*). Constituta ergo habentur duo triangula FED, *abd*, quorum latera sunt æqualia, alterum alteri, videlicet FE, *ab*, & ED, *bd*, ficuti etiam bases æquales FD, *ad*. Igitur anguli FED, *abd* sunt inter se æquales (*Lib. V. §. 82.*). Anguli autem FED, *abd* ii sunt, ex quibus desumitur inclinatio plani FEG ad planum ABCD (§. 10.). Ergo horum planorum inclinatio est ubique eadem. Itaque inclinatio &c. quod erat ostendendum.

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM

LIBER IX.

De planorum similitudine, & ratione.

HActenus ea planarum figurarum symptomata demonstravimus, quæ illis *absolute*, seu *secundum se* spectatis conveniunt: nunc ea consideranda sunt, quæ illis competunt, quatenus illarum una ad aliam refertur, sive quatenus una similis alteri est, certamque ad illam rationem habet.

DEFINITIO I.

1. *Figuræ rectilineæ ejusdem generis dicuntur similes, quæ sunt inter se mutuo æquiangulæ, & habent latera circa æquales angulos proportionalia.* Sic duo triangula ABC, *abc* erunt similia, si angulus ABC æqualis fuerit angulo *abc*, angulus BCA angulo *bca*, & angulus CAB angulo *cab*; & insuper si fuerit latus AB ad latus BC, ut latus *ab* ad latus *bc*, latus BC ad latus CA, ut latus *bc* ad latus *ca*, & latus CA ad latus AB, ut latus *ca* ad latus *ab*. Fig. 20. Fig. 21. Tab. III.

COROLLARIUM I.

2. *Figuræ planæ rectilineæ ejusdem generis inter se mutuo æquilateræ, & æquiangulæ sunt sibi mutuo similes.* Ut si duo triangula A*bc*, *abc* fuerint inter se mutuo æquilatera, & æquiangula, erunt sibi mutuo similia. Habent enim latera circa æquales angulos proportionalia. Quandoquidem si ponatur A*b* $=$ *ab*, & *bc* $=$ *bc*, erit quoque A*b* ad *bc*, ut *ab* ad *bc* (*Lib.I.§.*102.). Idipsum de aliis dicito. Fig. 20. Fig. 21. Tab. III.

COROLLARIUM II.

3. *Omnes figuræ rectilineæ regulares ejusdem generis sunt sibi mutuo similes.* Sunt enim omnes inter se mutuo æquiangulæ (*Lib.VI.§.*46.). Cumque earum quælibet sit æquilatera, duo quælibet latera unius eandem habent rationem inter se, quam duo quælibet latera alterius, nempe rationem æqualitatis; ac proinde ipsæ figuræ habent etiam latera circa æquales angulos proportionalia.

Co-

Corollarium III.

4. *Quodlibet latus figuræ regularis est homologum cuilibet lateri alterius figuræ regularis ejusdem generis.* Cum enim omnia latera figuræ regularis sint æqualia (*Lib. V.* §. 20.), perinde omnino est, quodcumque latus unius figuræ ad quodcumque latus alterius figuræ itidem regularis ejusdem generis referatur. Idem enim ad æqualia eandem rationem habet (*Lib.* I. §. 112.).

Definitio II.

Fig.22. Tab.III. 5. *Arcus similes duorum circulorum dicuntur illi, qui eandem habent proportionem ad integram sui circuli peripheriam.* Ut si arcus AeC circuli ABC fuerit ad totam peripheriam ABC, ut est arcus DoF circuli DEF ad totam peripheriam DEF, duo arcus AeC, DoF circulorum ABC, DEF erunt sibi mutuo similes.

Corollarium I.

6. *Æquales arcus ejusdem circuli, vel circulorum æqualium sunt sibi mutuo similes.* Eadem quippe est utriusque ratio ad sui circuli peripheriam (*Lib. I.* §. 102.).

Corollarium II.

Arcus similes duorum circulorum sunt directe inter se, ut integræ ipsorum circulorum peripheriæ.

7. Posita nimirum similitudine arcuum AeC, DoF, ratio arcus AeC ad
Fig.22. Tab.III. arcum DoF diversa ab ea non erit, quam habet peripheria ABC ad peripheriam DEF. Quandoquidem cum arcus AeC, DoF sint partes similes peripheriarum ABC, DEF (*Lib. I.* §. 37.) erit arcus AeC ad arcum DoF, ut tota peripheria ABC ad totam peripheriam DEF (§. 126.).

Definitio III.

8. *Duo circulorum sectores vocantur similes, quorum eadem est ratio ad suum circulum.* Sic duo sectores AGC, DGF circulorum ABC, DEF erunt simi-
Fig.22. Tab.III. les, si sector AGC fuerit ad circulum ABC, ut est sector DGF ad circulum DEF.

Definitio IV.

Fig.22. Tab.III. 9. *Segmenta duorum circulorum sunt similia, quæ eandem habent rationem ad suum integrum circulum.* Ut si ratio segmenti AeC ad suum circulum

ABC

ABC diversa non fuerit a ratione segmenti DoF, ad circulum DEF, duo ipsa segmenta AeC, DoF erunt similia.

Corollarium I.

10. *Segmenta æqualia, sicuti etiam sectores æquales ejusdem circuli, vel circulorum æqualium, sunt similia.* Habent enim omnia eandem rationem ad suum circulum (§. 102.).

Corollarium II.

Similia duorum circulorum segmenta, sicuti etiam sectores similes sunt inter se, ut ipsi integri circuli.

11. Sector nempe AGC circuli ABC est ad similem sectorem DGF circuli DEF, ut integer circulus ABC ad integrum circulum DEF. Cum enim sectores AGC, DGF sint partes similes circulorum ABC, DEF (*Lib.I.* §. 37.) erit sector AGC ad similem sectorem DGF, ut circulus ABC ad circulum DEF (§. 126.). Eodem modo ratiocinare de segmentis similibus AeC, DoF. Fig.22. Tab.III

Definitio V.

12. *Duæ figuræ rectilineæ similes dicuntur super duas rectas lineas similiter descriptæ, cum duæ illæ lineæ sunt latera ipsarum figurarum homologa, & æquales anguli eodem ordine sese consequuntur.* Ut si rectæ BC, *bc* fuerint latera homologa triangulorum similium ABC, *abc*, & æquales ipsorum anguli ABC, *abc* * BCA, *bca* * CAB, *cab* eodem ordine sese consequantur, duo ipsa triangula similia ABC, *abc* erunt similiter descripta super rectas BC, *bc*. Fig.20. Fig.21. Tab.III.

Definitio VI.

13. *Duo parallelogramma, sicuti etiam duo triangula plana rectilinea dicuntur reciprocare sibi mutuo bases, & altitudines, cum unius basis est ad basim alterius, ut reciproce altitudo posterioris ad altitudinem prioris.* Ut si basis BC trianguli ABC fuerit ad basim *bc* trianguli *abc*, quemadmodum altitudo *ae* hujus ad illius altitudinem AE, duo triangula ABC, *abc* dicentur reciprocare sibi mutuo bases, & altitudines. Idipsum dicito de duobus parallelogrammis ADBC, *adbc*. Fig. 1. Fig. 2. Tab.IV.

Definitio VII.

14. *Figura rectilinea dicitur circulo* inscripta, & *vicissim circulus figuræ rectilineæ* circumscriptus *vocatur, cum circuli peripheria transit per apices omnium angulorum ipsius figuræ.* Sic hexagonum DHM circulo BH *inscrip-* Fig. 7. Tab.III.

tum

tum est, & vicissim circulus BH est hexagono *circumscriptus*; quia apices omnium angulorum ipsius figuræ in circuli peripheria reperiuntur.

DEFINITIO VIII.

15. *Figura rectilinea dicitur circulo* circumscripta, *& vicissim circulus figuræ rectilineæ* inscriptus, *cum singula ipsius figuræ latera circuli peripheriam tangunt*. Sic quadratum ABDC *circumscriptum* est circulo *efgh*, & vicissim circulus *efgh* est quadrato ABDC *inscriptus*; quia nimirum singula ipsius quadrati latera ab inscripti circuli peripheria tanguntur.

Fig. 23. Tab. III.

DEFINITIO IX.

16. *Centrum figuræ rectilineæ regularis est punctum in illius area, quod est centrum circuli ipsi figuræ inscripti, vel circumscripti*. Sic punctum A est centrum hexagoni regularis DHM; quia est centrum circumscripti circuli BFL. Punctum quoque *a* est centrum quadrati ABDC; quia est centrum inscripti circuli *efgh*. Ceterum cuilibet figuræ rectilineæ regulari circulum inscribi, & circumscribi posse, praxis ipsa ostendit, suoque loco, cum scilicet de *figurarum inscriptione, & circumscriptione* agemus, perspicuum fiet.

Fig. 7. Fig. 23. Tab. III.

DEFINITIO X.

17. *Radius figuræ rectilineæ regularis est recta quæcumque linea ducta ab illius centro ad apicem cujuslibet anguli ipsius figuræ*. Ut si punctum A fuerit centrum hexagoni regularis DHM, rectæ AD, AF &c. erunt illius radii.

Fig. 7. Tab. III.

COROLLARIUM I.

18. *Radius figuræ rectilineæ regularis circulo inscriptæ non differt a radio ipsius circuli*. Idem est enim utriusque centrum (§. 16.), & circuli peripheria per omnium angulorum apices transit (§. 14.).

COROLLARIUM II.

19. *Omnes radii figuræ rectilineæ regularis circulo inscriptæ sunt æquales*. Cum enim a radiis circuli non sint diversi (§. 18.), erunt omnes, quemadmodum illi (*Lib. VII.* §. 10.), inter se æquales.

COROLLARIUM III.

20. *Radius figuræ rectilineæ regularis circulo circumscriptæ est major semidiametro ipsius circuli*. Sic radius *a*B quadrati ABDC est major semidiametro *ag* inscripti circuli *efgh*. Excurrit enim, ut patet, extra peripheriam ipsius circuli.

Fig. 21. Tab. III.

DE-

DEFINITIO XI.

21. *Catetus, sive radius rectus figuræ rectilineæ regularis est recta ducta ab illius centro in ejusdem latus, eique ad perpendiculum incumbens.* Ut si a centro A hexagoni regularis DHM cadat in latus HL recta perpendicularis AG, hæc erit *catetus*, sive *radius rectus* ipsius hexagoni DHM. Fig. 7. Tab.III.

COROLLARIUM I.

22. *Catetus figuræ rectilineæ regularis est minor ejusdem radio.* Nimirum *catetus* AG hexagoni regularis DHM est minor radio AH. Recta enim AG, utpote perpendicularis, minima est omnium rectarum, quæ a centro A in latus HL cadere possunt (*Lib. V. §.* 57.). Fig. 7. Tab.III.

COROLLARIUM II.

23. *Catetus figuræ rectilineæ regularis circulo inscriptæ est minor semidiametro ipsius circuli.* Semidiameter namque circumscripti circuli diversa non est ab ipsius figuræ radio (§.18.).

COROLLARIUM III.

24. *Cateti figuræ rectilineæ regularis diversi non sunt ab altitudine isoscelium triangulorum, in quæ figura ipsa resolvi potest.* Ut si hexagonum regulare DHM resolvatur in sex triangula isoscelia ope radiorum AB, AD, AF, AG, AL, AM, altitudo AG trianguli HAL erit ipsius hexagoni *catetus*. Est enim AG recta ducta a vertice A ipsius trianguli ad illius basim HL, eique ad perpendiculum incumbens (§. 21.). Fig. 7. Tab.III.

COROLLARIUM IV.

25. *Catetus figuræ rectilineæ regularis circulo circumscriptæ est radius inscripti circuli.* Nimirum recta *ag* ducta a centro *a* quadrati ABDC ad punctum *g*, in quo inscripti circuli *efgh* peripheria tangit latus ipsius quadrati, quæque est radius circuli *efgh*, est etiam *catetus* quadrati ABCD. Hæc enim ad perpendiculum insistit lateri BD ipsius quadrati (*Lib.VII. §.* 53.), prout ad *catetum* requiritur. Fig.23. Tab.III.

COROLLARIUM V.

26. *Catetus figuræ rectilineæ regularis circulo circumscriptæ est minor cateto alterius cujusvis figuræ rectilineæ itidem regularis eidem circulo inscriptæ. Catetus* namque figuræ circulo circumscriptæ radium ipsius circuli adæquat (§. 25.), a quo tamen deficit *catetus* figuræ circulo inscriptæ (§. 23.).

Co-

Corollarium VI.

27. *Cateti figuræ rectilineæ regularis sunt omnes inter se æquales.* Sunt enim radii inscripti circuli (§. 25).

Corollarium VII.

28. *Altitudines isoscelium triangulorum, in quæ polygonum regulare resolvi potest sunt omnes inter se æquales.* Cum enim horum triangulorum altitudines a catetis ipsius polygoni non differant (§. 24.), sicuti omnes cateti æquales sunt inter se (§. 27.), ita ipsorum triangulorum altitudines sunt inter se æquales.

Definitio XII.

29. *Circuli concentrici dicuntur illi, qui circa idem punctum sunt descripti, seu quibus idem est centrum.* Contra vero *illi excentrici vocantur, quorum centrum est diversum.* Nimirum *concentrici* sunt circuli ABC, EGF, quia
Fig. 3. Tab.IV. idem est utriusque centrum D. At vero *excentrici* sunt circuli ABC, DE; quia centrum prioris est G, posterioris est F, quæ sunt diversa.

Definitio XIII.

Fig. 3. Fig. 4. Tab.IV. 30. *Circuli in eodem plano descripti dicuntur inter se mutuo paralleli, cum illorum peripheriæ æqualiter ubique a se mutuo distant.* Ut si peripheria circuli ABC æqualiter ubique distet a peripheria circuli EGF, duo circuli in eodem plano descripti ABC, EGF erunt sibi mutuo paralleli.

Scholion.

31. Distantia a se mutuo peripheriarum ABC, EGF duorum circulorum ABC, EGF in eodem plano descriptorum attenditur penes segmenta AE, CF radiorum AD, CD majoris circuli ABC. Radii namque AD, CD
Fig. 3. Tab.IV. spectari possunt veluti rectæ ad perpendiculum insistentes peripheriæ ABC, ob æqualitatem scilicet angulorum, quos ipsi radii cum peripheria sui circuli constituunt (*Lib. VII. §. 12.*). *Illi ergo circuli censendi sunt sibi mutuo paralleli, quorum peripheriæ æqualia segmenta radiorum majoris circuli intercipiunt.*

Corollarium.

32. *Omnes circuli concentrici sunt sibi mutuo paralleli.* Videlicet paralleli sunt sibi mutuo duo circuli concentrici ABC, EGF. Ductis enim a commu-
Fig. 3. Tab.IV. ni centro D ad majoris peripheriam ABC radiis DA, DC, cum isti sint æquales inter se, quemadmodum etiam radii DE, DF (*ibid.* §. 10.), sublatis æqualibus

libus DE, DF, residua segmenta EA, FC erunt æqualia (*Syn. Alg.* §. 266.). Ergo eadem ubique est distantia a se mutuo duarum peripheriarum ABC, EGF (§. 31.); ac proinde circuli ABC, EGF erunt paralleli (§. 30.).

AXIOMA I.

Figuræ rectilineæ ejusdem generis, quæ eidem sunt æquilateræ, vel æquiangulæ, inter se quoque sunt æquilateræ, vel æquiangulæ.

33. Quæ namque eidem sunt æqualia, inter se quoque sunt æqualia (*Syn. Alg.* §. 259.).

AXIOMA II.

Si una duarum figurarum, quæ sint inter se æquilateræ, vel æquiangulæ, fuerit alteri æquilatera, vel æquiangula, altera quoque earundem erit eidem æquilatera, vel æquiangula.

34. Quandoquidem si unum duorum æqualium alteri æquale est, alterum quoque eorundem est eidem tertio æquale (*Syn. Alg.* §. 262.).

AXIOMA III.

Figuræ, quæ eidem sunt similes, sibi quoque mutuo sunt similes.

35. Ut si duo triangula plana rectilinea ABC, *abc* similia fuerint eidem triangulo X, sibi quoque mutuo erunt similia. Enimvero si duo triangula ABC, *abc* æquiangula sunt triangulo X, inter se quoque mutuo erunt æquiangula (§. 43.). Et si latera tam duorum ABC, X, quam duorum *abc*, X, quæ sunt circa æquales angulos, habent eandem rationem inter se, ipsa eadem latera duorum ABC, *abc* eandem inter se rationem habebunt; cum rationes, quæ eidem sunt æquales, inter se quoque sint æquales (*Lib. I.* §. 76.). Ergo duo triangula ABC, *abc* erunt sibi mutuo æquiangula, & æquilatera; ac proinde sibi mutuo similia. Fig. 20. Fig. 21. Tab. III.

Methodus indivisibilium explicata.

Methodus *indivisibilium*, quam primus omnium excogitavit, adhibuitque Vir Cl. P. Bonaventura Cavalerius Mediolanensis ex Ordine Jesuatorum, dicitur illa, qua, resolutis in sua quasi elementa figuris omnibus tam planis, quam solidis, abstrusiora illarum symptomata mira facilitate demonstrantur.

I.

36. Assumitur primo, lineas omnes constare ex punctis. Nomine *puncti* non

non intelligitur id, quod reipsa omni penitus caret extensione, partibusque tam realiter separabilibus, quam mente tantum designabilibus omnino destitutum est, sed magnitudo secundum omnem dimensionem infinite parva, minor nempe quacumque assignabili quantitate, atque adeo talis, ut nulla pars in ea discernatur, perinde ac si reipsa nullam omnino partem haberet.

Genesis linearum.

37. Ex hisce itaque punctis, quæ *minima physica* vocari etiam possunt, ponitur linea quæcunque primo consurgere. Profecto si unum ex hujusmodi punctis moveri intelligatur, lineam designare suo fluxu concipietur, *rectam* quidem, si moveatur fluxu recto; *curvam* vero, si flexo tramite spatium excurrat. Vestigium namque illud longitudinem dumtaxat habebit, quemadmodum fluens punctum ita spectatur, & sumitur, non secus ac si omni plane extensione reipsa destitutum esset. Sicuti ergo fluxus puncti est quædam veluti ipsius in spatio replicatio, ita linea, quam hujusmodi fluxus designat, non aliud erit, nisi aggregatum ex pluribus punctis in longum unitis.

COROLLARIUM.

38. *Elementa linearum sunt puncta.* Elementa enim cujusvis rei sunt illa, ex quibus res ipsa componitur.

II.

39 Quemadmodum porro linea ex punctis, ita superficies ex lineis, eodem plane modo, quo tela ex filis, secundum longitudiuem simul unitis, constare dicitur. In genesi namque superficierum concipitur linea ita moveri, ut vestigium longum dumtaxat, & latum post se relinquat, videlicet superficies plana ABDC ponitur fieri ex tali motu lineæ AB, ut sibi semper parallela existat, prout exhibent rectæ *ab*, *cd*, *ef*, CD, quæ considerari possunt, veluti vestigia relicta a linea fluente AB. Sicuti ergo fluxus puncti est quædam veluti ipsius puncti in spatio replicatio, ita fluxus lineæ est quædam veluti replicatio ipsius lineæ in eodem spatio; cumque hinc consurgat superficies, quemadmodum ex fluxu puncti nascitur linea, spectari potest superficies veluti aggregatum ex pluribus lineis secundum longitudinem simul unitis.

Fig. 24. Tab. III.

COROLLARIUM.

40. Hinc *elementa superficierum sunt lineæ.*

Gene-

Genesis parallelogrammi.

41. Oritur parallelogrammum quodcunque ex parallela elevatione rectæ lineæ ejusdem quantitatis continuo permanentis, ita tamen ut semper in eodem plano consistat. Sic parallelogrammum ABDC emergit ex tali motu rectæ AB in eodem plano, ut sibi semper sit parallela, ejusdemque perpetuo magnitudinis. Constat enim rectas AC, BD, quæ fiunt ab extremis punctis A, B rectæ generatricis AB, parallelas esse inter se; cum æqualiter hoc ipso inter se mutuo ubique distent. Constat etiam, rectas quascunque *ab*, *cd*, *ef*, CD parallelas basi AB, sibique mutuo, esse inter se æquales (*Lib.VI §.23.*). Hanc porro rectæ lineæ parallelam elevationem in genesi parallelogrammi metitur ipsius parallelogrammi altitudo. Ut si recta CA fuerit altitudo parallelogrammi ABDC, hæc erit mensura illius motus rectæ generatricis AB, ex quo parallelogrammum ipsum consurgit. Sola enim altitudo CA potest esse talis motus mensura, utpote omnium rectarum, quæ hujusmodi motum metiri possunt, minima (*Lib.V.§.57.*). Fig.24. Tab.III.

Corollarium I.

42. *Elementa parallelogrammi sunt omnia inter se æqualia.* Sunt enim rectæ determinatæ ex fluxu rectæ generatricis, quæ in suo motu ejusdem semper quantitatis perseverat.

Corollarium II.

43. *Hinc omne parallelogrammum ex tot rectis lineis æqualibus inter se, atque ipsius basi, sibique mutuo parallelis componitur, quot sunt puncta in illius altitudine.* Nimirum parallelogrammum CABD consurgit ex tot rectis æqualibus tum inter se, tum illius basi AB, atque inter se parallelis, quot puncta in illius altitudine CA numerantur. In parallela siquidem elevatione rectæ generatricis, sive basis AB, toties replicatur ipsa recta AB, quot sunt puncta in altitudine CA, quæ motum ipsius rectæ metitur. Fig.24. Tab.III.

Corollarium III.

44. *Spectari idcirco potest parallelogrammum veluti factum ex ductu basis in altitudinem.* Dum enim recta AB percurrit altitudinem CA, fitque parallelogrammum CABD, toties sumitur ipsa AB, quot sunt minima in altitudine CA. Sumere autem rectam AB, quot sunt minima in altitudine CA, perinde est omnino, ac rectam AB per rectam CA multiplicare. Ergo &c. Fig.24. Tab.III.

Hypothesis.

45. Si ergo basis parallelogrammi fuerit $= a$, ejusque altitudo $= b$, paral-

parallelogrammum optime designabitur per *ab*. Est enim *ab* factum ex ductu quantitatis *a* in quantitatem *b*.

Genesis circuli.

46. Oritur circulus ex completa rotatione rectæ lineæ in eodem plano semper existentis circa unum sui extremum penitus immobile. Ut si recta
Fig. 5. Tab.IV. AB ita agatur in orbem circa immobile punctum A, ut in eodem plano semper existat, atque illuc redeat, unde moveri cœpit, fiet circulus DBC. Constat enim, hujusmodi rectam circulare vestigium motu suo relinquere.

Corollarium I.

47. *Producitur propterea circulus a rotante ipsius radio circa centrum immobile*. Ex quo ad evidentiam evincitur, *omnes ejusdem circuli radios esse inter se æquales*.

Corollarium II.

48. *Area circuli componitur ex tot curvis circularibus lineis sibi mutuo concentricis, quot sunt puncta in illius radio, centro excepto*. Ut si radius
Fig. 6. Tab.IV. AB quatuor tantum contineat puncta A, *a*, *b*, B, area circuli erit composita ex tribus curvis circularibus *amn*, *bcd*, BCD. Quodlibet enim punctum rotantis radii AB curvam circularem motu suo describit, quæ omnes simul sumtæ aream ipsius circuli explent.

Corollarium III.

Fig. 7. Tab.IV. 49. *Area quoque sectoris circuli ex tot arcubus concentricis consurgit, quot, centro excepto, in illius radio puncta numerantur*. Sic sector ABC compositus erit ex quatuor arcubus concentricis BC, *de*, *cr*, *ab*; cum tot sint puncta radii AB, quæ in illius genesi circa centrum A in gyrum aguntur.

Corollarium IV.

50. *Circuli radiorum, atque adeo etiam diametrorum, æqualium sunt æquales*; & vicissim *æquales circuli habent radios, ac proinde etiam diametros, inter se æquales*. Similiter *circulus majoris radii, adeoque etiam majoris diametri, major est*; & vicissim *circulus, qui major altero est, tum radium, tum diametrum majorem habet*.

III.

51. Solidum componitur ex planis, vel curvis superficiebus, pro diversa nimirum ipsorum indole, sibi mutuo parallelis. Oritur enim solidum vel

ex

ex parallela elevatione plani, vel ex plano circa rectam immobilem rotante, ut suo loco explicabitur; ac proinde sicuti ex motu puncti fit linea, ex motu lineæ superficies, ita ex motu superficiei solidum efficitur. Verum de solidorum genesi plura suo loco dicemus. Id enim in presens summis tantummodo labiis attigisse sufficiat.

COROLLARIUM.

52. *Hinc elementa solidorum sunt superficies.*

Axioma fundamentale.

Illæ magnitudines sunt æquales inter se, quarum elementa sunt numero, & quantitate inter se æqualia.

53. Magnitudines namque illæ, quarum elementa sunt numero, & quantitate inter se æqualia, ita se habent, ut earum una, salva quantitate, alteri substitui possit.

LEMMA I.

Rectæ parallelæ, quæ rectam incidentem in partes æquales dividunt, intervalla habent æqualia.

54. Dupliciter potest recta linea in plures rectas parallelas incidere, *ad perpendiculum* scilicet, & *oblique*.

Casus primus.

Primo itaque recta RT ad perpendiculum incidat in rectas parallelas AB, CD, EF, a quibus in partes æquales RQ, QT dividatur. Dico, rectas AB, CD, EF æqualia intervalla habere. Fig. 13. Tab. II.

Demonstratio.

Stante namque hypothesi, partes RQ, QT sunt perpendicula, quæ distantiam determinant a se mutuo rectarum AB, CD, EF. Hujusmodi autem partes RQ, QT sunt æquales inter se. Ergo illarum rectarum intervalla sunt æqualia (*Lib. VI. §. 12.*).

Casus secundus.

Modo recta GM oblique incidat in rectas parallelas AB, CD, EF, ejusque partes inter illas comprehensæ, nimirum GK, KM, sint æquales. Dico, rectas AB, CD, EF æqualia a se mutuo intervalla habere. Fig. 11. Tab. II.

Demonstratio.

Ducantur ex punctis G, K perpendicula GH, KL. Cum igitur anguli alterni GHK, HKL producti a recta HK in ipsa perpendicula incidente, sint recti (*Lib. III* §. 23.) ac proinde æquales (*Ibid.* §. 37.), perpendicula GH, KL erunt parallela (*Lib. IV.* §. 12.). Recta autem GM in illa incidit Ergo anguli HGK, LKM erunt æquales (*Ibid.* §. 14.). Eadem ratione æquales erunt anguli GKH, KML; cum rectæ CD, EF positæ sint parallelæ. Æqualia autem sunt ex hypothesi latera GK, KM triangulorum GHK, KLM, quibus æquales anguli, alter alteri, adjacent. Ergo latera, sive perpendicula GH, KL sunt æqualia (*Lib. V.* §. 93.); atque adeo rectæ parallelæ AB, CD, EF intervalla habent æqualia (*Lib. VI.* §. 12.). Itaque rectæ parallelæ &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA I.

Si in triangulo plano rectilineo ducatur recta basi parallela secans utrumque trianguli latus, proportionaliter latera ipsa secabit: segmenta unius erunt in eadem proportione ad segmenta alterius: utrumque latus eandem ad sua respective segmenta rationem habebit: segmenta laterum erunt, ut ipsa latera: basis erit ad secantem, ut latus ad segmentum; & ut latus ad basim, ita erit segmentum ad rectam secantem.

In triangulo plano rectilineo ABC ducatur recta DE, quæ secans utrumque trianguli latus AB, AC, sit basi BC parallela.

I.

Fig. 8. Tab. IV. 55. Dico primo, rectam DE proportionaliter secare latera AB, AC, videlicet esse AE ad EC, ut est AD ad DB.

Demonstratio.

Ponatur latus AB divisum in quinque partes æquales, & quidem ea lege, ut tres ex illis partibus, videlicet A*a*, *ab*, *b*D, sint in segmento AD, & duæ D*c*, *c*B in segmento DB. Per singula autem divisionis puncta, sicuti etiam per verticem A ipsius trianguli ducantur rectæ A*v*, *ad*, *be*, *cf*, quæ basi BC, adeoque etiam inter se (*Lib. IV.* §. 17.), nec non rectæ secanti DE sint parallelæ (*Lib.* IV. §. 18.). Quoniam igitur partes A*a*, *ab*, *b*D, D*c*, *c*B positæ sunt æquales, rectæ parallelæ A*v*, *ad* &c. æqualia intervalla habebunt (§. 54.). Quamobrem latus AC divisum ab illis erit in quinque partes æquales A*d*, *de*, *e*E, E*f*, *f*C (*Lib.* VI. §. 25.), ex quibus tres erunt in segmento AE, & duæ in segmento EC, quemadmodum tres ex totidem æqualibus in segmento AD, & duæ in segmento DB reperiuntur. Ergo erit AE ad EC, ut est AD ad DB (*Lib.* I. §. 31.), in ratione nimirum *sesquialtera* (*ibid.* §. 55.). II.

I I.

56. Dico secundo, segmenta unius lateris esse in eadem ratione ad segmenta alterius, esse nimirum DB ad EC, ut est AD ad AE.

Demonstratio.

Cum enim sit AE. EC = AD. DB (§. 55.), erit quoque DB. AD = EC. AE (*Lib. I.* §. 121.). Igitur habebitur etiam DB. EC = AD. AE (*Ibid.* §. 125.).

I I I.

57. Dico tertio, utrumque latus eandem ad sua respective segmenta rationem habere, nimirum esse AC. AE = AB. AD, quemadmodum etiam AC. EC = AB. DB.

Demonstratio.

Quandoquidem cum sit AE. EC = AD. DB (§. 55.), erit quoque *componendo* AC. AE = AB. AD (*Lib. I.* §. 138.), necnon AC. EC = AB. DB (*ibid.* §. 132.).

I V.

58. Dico quarto, segmenta esse, ut ipsa latera, videlicet esse AD. AE = AB. AC, sicuti etiam DB. EC = AB. AC.

Demonstratio.

Cum enim sit AC. AE = AB. AD, & AC. EC = AB. DB (§. 57.), erit etiam *invertendo* AD. AB = AE. AC, & DB. AB = EC. AC (*Lib. I* §. 121.). Ergo *alternando* erit AD. AE = AB. AC, & DB. EC = AB. AC (*Ibid.* §. 125.).

V.

59. Dico quinto, basim BC trianguli ABC esse ad rectam secantem DE, ut est latus AB ad segmentum AD, adeoque etiam latus AC ad segmentum AE. Fig. 9. Tab. IV.

Demonstratio.

Posita namque divisione lateris AB, ut supra, nimirum in quinque æquales partes, ex quibus tres sint in segmento AD, & duæ in segmento

fideo DB, ducantur rectæ *ag*, *bf*, D*e*, *cd*, B*p* parallelæ lateri AC, adeoque etiam inter se (*Lib. IV. §. 17.*). Divisa igitur erit basis BC in tot partes, in quot divisum est latus AB, atque hujusmodi partes, videlicet B*d*, *de*, *ef*, *fg*, *g*C æquales erunt inter se (*Lib. VI. §. 25.*); cum ob æqualitatem partium A*a*, *ab*, *b*D, D*c*, *c*B rectæ parallelæ AC, *ag*, *bf*, D*e*, *cd*, B*p* æqualia intervalla habeant (§. 54). Divisa similiter erit recta secans DE in tot partes, in quot divisum est segmentum AD; cumque rectæ DE, BC positæ sint parallelæ, partes secantis DE non tantum inter se, verum etiam partibus B*d*, *de*, *ef*, *fg*, *g*C æquales erunt (*Lib. VI. §. 26.*). Basis igitur BC erit ad rectam secantem DE, ut est latus AB ad segmentum AD (§. 57.); ac proinde etiam ut latus AC ad segmentum AE (*Lib. I. §. 78.*); cum jam sit AC ad AE, ut AB ad AD (§. 57). Igitur &c.

VI.

60. Dico sexto, segmentum AD lateris AB esse ad rectam secantem DE, ut est latus AB ad basim BC.

Demonstratio.

Quandoquidem cum ostensum fuerit, esse AB. AD == BC. DE (§. 59.), erit quoque *alternando* AD. DE == AB. BC (*Lib. I. §. 125.*). Eodem modo demonstrabitur, esse AE. ED == AC. CB. Itaque si in triangulo plano &c. quod erat ostendendum.

S C H O L I O N.

61. Operationes omnes, quæ fiunt ope *circini proportionis*, §. 59. potissimum innituntur.

C O R O L L A R I U M.

Si duo circuli intus sese tangant, & a puncto contactus duæ rectæ ducantur, quarum altera per centrum majoris transeat, altera vero extra centrum cadat, sed minoris peripheriam dividit, erunt diametri subtensis proportionales, atque insuper ipsæ rectæ proportionaliter sectæ erunt a peripheria minoris circuli.

62. Duo nimirum circuli ABC, ADE intus sese tangant in puncto A, a quo per centrum F majoris circuli ad illius peripheriam ducatur recta, sive diameter AC, extra centrum vero recta AB secans minoris peripheriam in puncto D. Erit AC. AB == AE. AD, necnon AE. EC == AD. DB. Cum
Fig. 10. Tab. IV. enim recta AC per centrum G minoris circuli itidem transeat (*Lib. VII. §. 57.*) ductis rectis BC, DE, anguli ADE, ABC erunt recti, utpote in semicirculo consistentes (*ibid. § 75.*); adeoque æquales inter se (*Lib. III. §. 37.*). Quam-

Quamobrem duæ rectæ lineæ DE, BC erunt sibi mutuo parallelæ (*Lib. IV. §.* 11.). Igitur erit AC. AB=AE. AD (§. 57.), sicuti etiam AE. EC =AD. DB (§. 55.).

THEOREMA II.

In omni triangulo plano rectilineo recta secans proportionaliter duo ipsius latera est ejusdem basi parallela.

63. In triangulo plano rectilineo ABC recta DE proportionaliter dividat duo ipsius latera AB, AC, ita nimirum ut sit AE ad EC, ut est AD ad DB. Dico, rectam secantem DE esse parallelam basi BC.

Demonstratio.

Si namque recta DE parallela non est basi BC, ducatur per idem punctum D recta DF basi parallela. Igitur erit AF. FC=AD. DB (§. 55.). Est autem per hypothesim AE. EC=AD. DB. Ergo erit quoque AF. FC=AE. EC (*Lib. I. §.* 76.), & *componendo* erit AC. FC=AC. EC (*ibid. §.* 132.). Duæ autem magnitudines FC, EC inæquales sunt inter se, nempe FC major, & EC minor (*Syn. Alg. §.* 257.). Ergo eandem magnitudo AC eandem ad inæquales magnitudines rationem habet. Id autem plane falsum est (*Lib. I §.* 119.). Ergo recta DF non est basi BC parallela. Eodem modo ostendam, nullam aliam rectam diversam a recta DE duci posse per punctum D parallelam basi BC. Igitur recta DE est basi BC parallela; ac proinde in omni triangulo &c. quod erat ostendendum. Fig. 11. Tab. IV.

COROLLARIUM.

Recta secans duo trianguli latera, ita ut eandem ambo ad suum segmentum rationem habeant, est basi ipsius trianguli parallela.

64. Recta nimirum DE in triangulo ABC parallela erit basi BC, si fuerit AB. AD=AC. AE. Si namque fuerit AB. AD=AC. AE, erit AB—AD. AD=AC—AE. AE, sive BD. DA=CE. EA (*Lib. I. §.* 135.), & *invertendo* AD. DB=AE. EC (*Ibid. §.* 121.). Ergo recta DE erit basi BC parallela (§. 63.). Fig. 11. Tab. IV.

THEOREMA III.

In omni triangulo plano rectilineo recta basi parallela aufert triangulum simile toti triangulo.

65. In triangulo plano rectilineo ABC ducatur recta DE parallela basi BC. Dico, triangulum ADE simile esse toti triangulo ABC. Fig. 12. Tab. IV.

Demonstratio.

Cum enim recta DE sit parallela basi BC, angulus ADE æqualis erit angulo ABC, & angulus AED angulo ACB (*Lib. IV. §. 14.*). Angulus autem BAC est communis utrique triangulo. Ergo duo triangula ABC, ADE sunt inter se mutuo æquiangula (*Lib. V. §. 19.*). Habent autem etiam latera circa æquales angulos proportionalia; cum ob parallelismum rectarum DE, BC sit AD . DE=AB . BC, DE . EA=BC . CA (§. 60.), necnon EA . AD=CA . AB (§. 58.). Ergo duo triangula ADE, ABC sunt similia (§. 1); rectaque proinde DE triangulum aufert simile triangulo ABC. Itaque recta &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA IV.

Triangula sibi mutuo æquiangula sunt similia, habentque latera æqualibus angulis opposita homologa.

Fig. 20. Fig. 21. Tab. III. Duo triangula plana rectilinea ABC, *abc* sint sibi mutuo æquiangula, esto nimirum angulus ABC æqualis angulo *abc*, angulus BCA angulo *bca*, & angulus CAB angulo *cab*.

I.

66. Dico primo, duo ipsa triangula ABC, *abc* esse similia.

Demonstratio.

Quoniam angulus *bac* trianguli *abc* æqualis est angulo BAC trianguli ABC, si unus alteri superponatur, sibi mutuo congruent (*Lib. V. §. 59.*), cadetque propterea latus *ab* super latus AB, & latus *ac* super latus AC, & basis *bc* secabit latera AB, AC, prout exhibet *fig.* 20. Anguli autem *abc*, ABC positi sunt æquales. Ergo recta *bc* in triangulo ABC, basis nempe trianguli *abc* positi super triangulum ABC, parallela erit basi BC trianguli ABC (*Lib. IV. §. 11.*). Igitur triangulum *abc* simile est triangulo ABC (§. 65.).

II.

67. Dico secundo, similium triangulorum ABC, *abc* latera AB, *ab*, sicuti etiam BC, *bc*, necnon AC, *ac*, quæ æqualibus, ut patet, angulis opponuntur, esse homologa.

Demon-

Demonstratio.

Quandoquidem cum ob similitudinem triangulorum ABC, *abc*, habeatur AB. BC=*ab*. *bc*, & CA. AB=*ca*. *ab* (§. 1.), homologi erunt tam antecedentes termini AB, *ab* * CA, *ca* (*Lib. I.* §. 51.), quam consequentes BC, *bc* (*Ibid.* §. 122.). Ergo &c. Itaque triangula &c. quod erat ostendendum.

C O R O L L A R I U M.

Si inter duas rectas parallelas duæ rectæ se invicem decussent, earum segmenta erunt proportionalia.

68. Ut si inter rectas parallelas AB, CD duæ rectæ *ab*, *cd* se mutuo secuerint in puncto *e*, earum segmenta erunt proportionalia, erit nempe *ae*. *eb*=*ce*. *ed*. Cum enim anguli *aec*, *deb* sint æquales (*Lib. III.* §. 51.), Fig. 13. Tab. IV.
utpote ad verticem oppositi, sicuti etiam anguli *eac*, *ebd*, necnon anguli *eca*, *edb*, utpote alterni (*Lib. IV.* §. 15.), duo triangula *aec*, *deb* erunt sibi mutuo æquiangula (*Lib. V.* §. 19.), adeoque similia (§. 66.). Ergo habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, nempe erit *ae*. *ec*=*eb*. *ed*; adeoque *ae*. *eb*=*ec*. *ed* (*Lib. I.* § 125.).

T H E O R E M A V.

Duo triangula habentia unum angulum uni angulo æqualem, & latera circa illum proportionalia, sunt similia.

69. Angulus *bac* trianguli *abc* sit æqualis angulo BAC trianguli ABC, sitque latus *ab* ad latus *ac*, ut est latus AB ad latus AC. Dico, duo ipsa triangula ABC, *abc* esse similia.

Demonstratio.

Posito triangulo *abc* super triangulum ABC, duo anguli *bac*, BAC, utpote æquales, sibi mutuo congruent (*Lib. V.* §. 39.); atque adeo cadet latus *ab* super latus AB, & latus *ac* super latus AC, secabitque basis *bc* latera AB, AC, ut in *fig.* 20. Cum igitur per hypothesim habeatur *ab*. *ac* =AB. AC in triangulo ABC, erit quoque *ab*. AB=*ac*. AC (*Lib. I.* §. 125.), & *invertendo* erit AB. *ab*=AC. *ac* (*Ibid.* §. 121.). Ergo recta *bc* parallela erit basi BC (§. 64.); ac proinde erit triangulum *abc* simile triangulo ABC (§. 65.). Duo itaque triangula &c. quod erat ostendendum. Fig. 20. Fig. 21. Tab. III.

THEO-

THEOREMA VI.

Si duo triangula habuerint latera sibi mutuo proportionalia, erunt sibi mutuo æquiangula.

70. Duo triangula ABC, *abc* habeant latera sibi mutuo proportionalia, esto nempe AB. BC = *ab*. *bc*, BC. CA = *bc*. *ca*, CA. AB = *ca*. *ab*. Dico, duo triangula ABC, *abc* esse inter se mutuo æquiangula.

Demonstratio.

Ad basim BC trianguli ABC sint duo anguli DBC, DCB, quorum DBC sit æqualis angulo *abc* trianguli *abc*, & angulus DCB angulo *acb*. Quo-
Fig. 14. niam igitur duo anguli *abc*, *acb* minores sunt duobus rectis (*Lib. IV. §. 42.*),
Fig. 15. duo quoque DBC, DCB duobus rectis minores erunt (*Syn. Alg. §. 264*).
Tab. IV. Concurrent ergo rectæ DB, CD in puncto D, si in directum producantur (*Lib. IV. §. 8.*), triangulum nempe constituent BDC. Posuimus autem angulum DBC æqualem angulo *abc*, & angulum DCB angulo *acb*. Ergo etiam reliquus BDC reliquo *bac* æqualis erit (*Lib. V. §. 46.*). Sunt igitur duo triangula BDC, *abc* inter se mutuo æquiangula (*Ibid. §. 19.*); adeoque similia (*§. 66.*). Quamobrem erit DB. BC = *ab*. *bc* (*§. 1.*). Est autem per hypothesim AB. BC = *ab*. *bc*. Ergo erit etiam DB. BC = AB. BC (*Lib. I. §. 76.*); ac proinde DB = AB (*Ibid. §. 103.*). Eodem modo ostendam, duo quoque AC, DC esse inter se æqualia. Duo autem triangula ABC, DBC habent commune latus BC. Ergo duo ipsa triangula sunt inter se mutuo æquilatera (*Lib. V. §. 18.*); atque adeo inter se mutuo æquiangula (*Lib. V. §. 85.*). Ostensum porro est, duo triangula DBC, *abc* esse inter se mutuo æquiangula. Igitur æquiangula itidem inter se erunt duo ABC, *abc* (*§. 33.*). Itaque si duo triangula &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Triangula plana rectilinea, quorum latera sint inter se proportionalia, sunt similia.

71. Sunt enim inter se mutuo æquiangula, omniaque triangula inter se mutuo æquiangula sunt similia (*§. 66.*).

THEOREMA VII.

In omni triangulo rectangulo recta perpendicularis ducta ab angulo recto ad basim, duo efficit triangula toti, & inter se similia.

Fig. 16. Ab angulo recto BAC trianguli rectanguli BAC ducatur ad basim BC
Tab. IV. recta perpendicularis AE.

I.

72. Dico primo, utrumque triangulum AEB, AEC ſimile eſſe toti triangulo ABC.

Demonſtratio.

Cum enim ob hypotheſim angulus AEC ſit rectus (*Lib.* III. *§.* 23.) æqualis erit angulo BAC (*ibid. §.* 37.). Angulus autem ACB communis eſt utrique triangulo ABC, AEC. Ergo reliquus quoque angulus EAC trianguli AEC æqualis erit reliquo angulo ABC trianguli ABC (*Lib.V.§.*46.). Sunt igitur duo triangula ABC, AEC inter ſe mutuo æquiangula (*Lib. V. §.* 19.). Ergo ſunt ſimilia (*§.* 66). Eodem modo oſtendam, ſimilia ſibi mutuo eſſe etiam duo AEB, ABC. Igitur &c.

II.

73. Dico ſecundo, duo triangula AEB, AEC eſſe ſibi mutuo ſimilia.

Demonſtratio.

Duo triangula AEB, AEC ſimilia ſunt eidem triangulo ABC (*§.* 72.). Ergo inter ſe quoque ſunt ſimilia (*§.* 35.). In omni igitur triangulo &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Si in triangulo rectangulo ab angulo ipſius recto ad baſim recta perpendicularis ducatur, hæc erit media proportionalis inter partes baſis. Latus vero trianguli, quod eſt ad partem, erit media proportionalis inter totam baſim, & ipſam partem.

74. Nimirum ſi ab angulo recto BAC trianguli rectanguli ABC ad baſim BC ducatur recta perpendicularis AE, hæc erit media proportionalis inter partes BE, EC ipſius baſis. Latus quoque AC erit media proportionalis inter totam baſim BC, & ſegmentum EC, ſicuti etiam latus BA inter totam BC, & ſegmentum BE. Cum enim duo triangula AEC, AEB ſint ſimilia (*§.* 73.), ſintque ipſorum anguli AEB, AEC æquales (*Lib.* III. *§.*37.), utpote recti (*ibid. §.* 23.), erunt latera circa illos proportionalia, erit nempe BE. EA=EA. EC, ſive ∺ BE. EA. EC (*§.* 1.). Eandem ob cauſam, cum triangulum AEC ſit ſimile triangulo ABC (*§.*72.), & angulus ACB ſit utrique communis, erit BC. CA=CA. EC (*§.* 1.), ſive ∺ BC. CA. CE. Eodem modo demonſtrabitur, eſſe ∺ BC. BA. BE. Fig. 16. Tab. IV.

SCHO-

SCHOLION.

75. Hoc corollarium poteſt aliter, & quidem evidentius oſtendi. Aſſumatur enim in baſe BC ſegmentum FC æquale lateri AC, & in latere AC
Fig.16. ſegmentum GC æquale ſegmento EC baſis BC, rectaque ducatur GF. Quo-
Tab.IV. niam igitur latera CG, CE triangulorum AEC, FGC ſunt æqualia, ſicuti etiam latera AC, FC, & angulus ACF eſt communis utrique triangulo, baſis FG æqualis erit baſi AE (*Lib. V.* §.73.), duoque ipſa triangula AEC, FGC erunt inter ſe mutuo æquilatera (*Ibid.* §. 18.), atque adeo inter ſe æquiangula (*Ibid.* §. 85.). Angulus ergo FGC æqualis erit angulo AEC, cum æqualia poſita ſint latera FC, AC. Eſt autem angulus AEC æqualis angulo BAC (*Lib. III.* §. 37.), cum uterque ſit rectus. Ergo angulus quoque FGC angulo BAC æqualis erit (*Syn. Alg.* § 259.); rectaque idcirco FG erit rectæ AB parallela (*Lib. IV.* § 11.). Habebitur ergo BC. FC=AC. GC (§. 57.). Poſuimus autem AC=FC, & EC=GC. Ergo erit BC. AC=AC. EC (*Lib.* I. §.112.). Eodem modo demonſtrabitur, eſſe BC. BA=AB. BE, quemadmodum etiam BE. EA=EA. EC.

COROLLARIUM I.

Recta quæcunque in ſemicirculo ſecans diametrum ad angulos rectos eſt media proportionalis inter partes ipſius diametri.

76. Ut ſi in ſemicirculo BAC ducatur recta AE ſecans diametrum BC ad angulos rectos in puncto E, recta EA erit media proportionalis inter
Fig.16. Tab.IV. partes BE, EC ipſius diametri BC. Etenim ductis ab extremo A ad extrema B, C rectis AB, AC, angulus BAC erit rectus (*Lib. VII.* §.75.), adeoque triangulum BAC rectangulum (*Lib. V.* §.29.). Ergo erit ∺ BE. EA. EC (§.74.).

THEOREMA VIII.

Omnia latera homologa duarum figurarum rectilinearum ſimilium eandem inter ſe rationem habent.

Fig.17. Fig.18. Tab.IV. 77. Sint duæ figuræ rectilineæ ſimiles ABCDE, *abcde*, quarum latera homologa ſint AB, *ab* * BC, *bc* * CD, *cd* * DE, *de* * EA, *ea*, & anguli æquales ABC, *abc* * BCD, *bcd* * CDE, *cde* * DEA, *dea* * EAB, *eab*. Dico, eandem eſſe rationem omnium laterum homologorum, videlicet eſſe AB. *ab*=BC. *bc*=CD. *cd*=DE. *de*=EA. *ea*.

Demonſtratio.

Cum enim figuræ ſint ſimiles, habebunt latera circa æquales angulos proportionalia (§. 1.), erit nempe AB. BC=*ab*. *bc*. Igitur *alternando* habebi-

bebitur quoque AB. ab=BC. bc (Lib.I.§.125.). Eodem modo ostendam, esse BC. bc=CD. cd &c. Itaque omnia latera homologa &c. quod erat ostendendum.

THEOREMA IX.

Altitudines triangulorum similium, quorum bases sint latera ipsorum homologa, sunt directe inter se, ut eorundem bases.

78. Tres casus distinguendi sunt, ut theorema plenius ostendatur. Vel enim altitudines cadunt intra crura triangulorum, vel extra ipsa, vel cum uno illorum congruunt.

Casus primus.

Sint igitur primo duo triangula similia ABC, *abc*, quorum bases BC, *bc* sint latera ipsorum homologa, sintque propterea æquales anguli ABC, *abc* * BCA, *bca* * CAB, *cab*. Altitudines autem sint rectæ AD, *ad*. Dico, altitudinem AD trianguli ABC esse ad altitudinem *ad* trianguli *abc*, ut est basis BC ad basim *bc*. Fig.19. Fig.20. Tab.IV.

Demonstratio.

Quoniam anguli ABC, *abc* æquales sunt per hypothesin, sicuti etiam anguli ADB, *adb*, utpote recti (*Lib.* III. §. 23.) etiam reliquus BAD trianguli BAD erit reliquo *bad* trianguli *bad* æqualis (*Lib.V.* §. 46.). Duo igitur triangula BAD, *bad* sunt inter se mutuo æquiangula (*Ibid.*§ 19), adeoque similia (§. 66.), habentque latera æqualibus angulis opposita, nimirum AD, *ad* * BD, *bd*, homologa (§. 67.). Eadem autem est ratio omnium laterum homologorum figurarum rectilinearum similium (§. 77.). Ergo erit AD. *ad*=BD. *bd*. Eodem modo demonstrabitur, esse AD. *ad*=DC. *dc*. Sunt igitur BD. *bd*=DC. *dc* (*Lib.*I. §.76.); ac proinde BD+DC. *bd*+*dc*=BD. *bd*, sive BC. *bc*=BD. *bd* (*Ibib.* §. 144.). Ostensum est autem, esse AD. *ad*=BD. *bd*. Ergo erit quoque AD. *ad*=BC. *bc* (*Ibid.* §. 78.).

Casus secundus.

Sint modo duo triangula similia ABC, *abc*, quorum altitudines AD, *ad* cadant extra eorum bases, scilicet extra latera ipsorum homologa BC. *bc*. Dico, esse AD. *ad*=BC. *bc*. Fig.21. Fig.22. Tab.IV.

Demonstratio.

Basibus in directum productis, cum duo anguli ACB, ACD æquales sint duobus *acb*, *acd* (*Syn. Alg.* §. 259.), utpote tam illi, quam isti æquales duobus rectis (*Lib.* III. §. 40.), ablatis æqualibus ACB, *acb*, erit reliquus

ACD

ACD reliquo *acd* æqualis (*Syn. Alg.* §. 166.). Æquales sunt autem etiam duo ADC, *adc*, utpote recti (*Lib.* III. §. 23.). Ergo duo quoque DAC, *dac* æquales erunt (*Lib. V.* §. 46.), duoque propterea triangula ACD, *acd*, utpote æquiangula, erunt sibi mutuo similia (§. 66.), habebuntque latera æqualibus angulis opposita homologa (§. 67.); ac proinde erit AD. *ad*=DC. *dc*=CA. *ca* (§. 77.). Est autem eandem quoque ob causam BC. *bc*=AC. *ac*; cum hujusmodi latera sint homologa. Ergo erit BC. *bc*=CD. *cd* (*Lib. I.* §. 76.). Demonstravimus autem, esse AD. *ad*=CD. *cd*. Ergo erit etiam AD. *ad*=BC. *bc* (*ibid.* §. 77.).

Casus tertius.

Fig. 23. Fig. 24. Tab. IV. Altitudines demum triangulorum similium ABC, *abc* coincidant cum lateribus eorundem homologis AC, *ac*. Dico, altitudines ipsas AC, *ac* esse directe inter se, ut ipsorum bases BC. *bc*.

Demonstratio.

Enimvero, cum per hypothesim tam bases BC, *bc*, quam altitudines AC. *ac* triangulorum ABC, *abc* sint latera ipsorum homologa, manifeste sequitur, esse AC. *ac*=BC. *bc* (§. 77.). Altitudines itaque triangulorum &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Altitudines duorum parallelogrammorum similium, quorum bases sint latera ipsorum homologa, sunt directe inter se, ut eorundem bases.

79. Ut si duo parallelogramma similia ABCD, *abcd* ita spectentur, ut
Fig. 1. bases BC, *bc* sint latera ipsorum homologa, eorum altitudines DE, *de* erunt
Fig. 2. directe inter se, ut eorundem bases. Quandoquidem, ductis diagonalibus
Tab. V. DB, *db*, cum per hypothesim anguli BCD, *bcd* sint æquales, & latera BC, CD * *bc*, *cd* proportionalia, triangulum DBC simile erit triangulo *dbc* (§. 69.). Sunt autem altitudines DE, *de* triangulorum DBC, *dbc* directe, ut bases BC, *bc* (§. 78.). Ergo &c.

COROLLARIUM II.

Altitudines duorum triangulorum, sicuti etiam duorum parallelogrammorum similium, quorum bases sint latera ipsorum homologa, sunt directe inter se, ut duo qualibet homologa eorundem latera.

80. Eadem enim est ratio omnium laterum homologorum duarum figurarum rectilinearum similium (§. 77.), & ratio, quæ uni duarum, vel plurium rationum æqualium æqualis est, alteri quoque earundem est æqualis (*Lib. I.* §. 78.). Co-

Corollarium III.

Elementa trianguli plani rectilinei decrescunt in ratione imminutæ altitudinis.

81. Elementum scilicet *cd* trianguli ABC eam habet rationem ad elementum BC ejusdem, quam habet altitudo *Af* respondens elemento *cd* ad altitudinem AD respondentem elemento BC. Elementum quoque *ab* est ad elementum BC, ut altitudo *Ae* ad altitudinem AD. Cum enim trianguli elementa sint rectæ lineæ basi parallelæ, duo triangula *Acd*, ABC erunt similia (§. 65.), eorumque latera homologa erunt rectæ *cd*, BC (§. 67.). Quamobrem habebitur *cd* ad BC, ut est altitudo *Af* ad altitudinem AD (§. 78.). Eadem ratione erit *ab* ad BC, ut *Ae* ad AD. Fig. 3. Tab. V.

Genesis trianguli plani rectilinei.

82. Hinc triangulum planum rectilineum oritur ex parallela elevatione rectæ lineæ continuo decrescentis in ratione imminutæ altitudinis. Sic triangulum ABC consurgit ex tali motu rectæ BC, ut sibi semper sit parallela, & pro ratione imminutæ altitudinis AD ipsius trianguli continuo minuatur. Fig. 3. Tab. V.

Corollarium I.

83. *Consurgit propterea triangulum quodcunque planum rectilineum ex tot rectis parallelis, continuo pro ratione imminutæ altitudinis decrescentibus, quot in ipsa altitudine puncta numerantur.*

Corollarium II.

84. Hinc *spectari potest triangulum planum rectilineum, veluti factum ex multiplicatione basis, in ratione imminutæ altitudinis continuo decrescentis, per ipsam altitudinem.*

Theorema X.

In omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, parallelogramma toti, & inter se sunt similia.

In parallelogrammo ACDB ducatur recta EF parallela lateribus AC, BD secans diagonalem BC in puncto K. Tum per punctum sectionis K ducatur recta GH parallela lateribus AB, CD, constitutaque idcirco habeantur duo parallelogramma EKHB, GKFC, quæ circa diametrum BC parallelogrammi ACDB posita dicuntur. Fig. 4. Tab. V.

I.

I.

85. Dico primò, utrumque parallelogrammum EKHB, GKFC simile esse toti parallelogrammo ACDB.

Demonstratio.

Cum enim recta EF posita sit parallela lateri AC, angulus BEF æqualis erit angulo BAC (*Lib. IV.* §. 14.), & eadem ratione etiam angulus GHB angulum CDB æquabit; cum recta GH posita sit parallela rectæ CD. Angulus autem ABD communis est utrique parallelogrammo ACDB, BEKH. Ergo tres anguli BEF, GHB, ABH parallelogrammi EKHB æquales sunt tribus angulis BAC, CDB, ABD parallelogrammi ACDB; ac proinde etiam reliquus EKH erit reliquo ACD æqualis (*Lib. VI.* §. 17.). Duo igitur parallelogramma EKHB, ACDB sunt inter se mutuo æquiangula (*Lib. V.* §. 19.). Rursus cum per hypothesim recta EK in triangulo ABC parallela sit basi AC, erit BE . EK == BA . AC (§ 60.), quæ sunt latera circa æquales angulos BEK, BAC. Eadem ratione erit KH . HB == CD . DB; cum in triangulo CBD recta KH posita sit parallela basi CD. Est autem recta BH æqualis rectæ EK, & recta DB rectæ AC (*Lib. VI.* §. 20.). Ergo erit quoque HK . KE == DC . CA (*Lib.* I. §. 112.), sicuti etiam EB . BH == AB . BD; cum tam recta BH rectam EK, quam recta AC rectam BD adæquet (*Lib. VI.* §. 20.). Duo igitur parallelogramma ACDB, BEKH sunt inter se mutuo æquiangula, & habent latera circa æquales angulos proportionalia. Igitur sunt similia (§. 1.). Eodem modo ostendam, parallelogrammum quoque GKFC simile esse parallelogrammo ACDB; adeoque &c.

II.

86. Dico secundo, parallelogramma BEKH, GKFC esse sibi mutuo similia.

Demonstratio.

Duo parallelogramma BEKH, GKFC similia sunt toti parallelogrammo ACDB (§. 85.). Ergo inter se quoque sunt similia (§. 35.). In omni ergo parallelogrammo &c. quod erat ostendendum.

LEMMA II.

Parallelogramma ejusdem altitudinis sunt inter easdem rectas parallelas.

Fig. 5. Tab. V. 87. Sint duo parallelogramma ABCD, EFGH, quorum altitudines DK, HL æquales sint inter se, eorumque bases BC, FG in eadem recta BL reperia-

perlantur. Dico, ipsa parallelogramma perinde se habere, ac si inter easdem rectas parallelas existerent.

Demonstratio.

Per extrema puncta D, H ducatur recta DH. Quoniam igitur anguli DKC, HLG sunt recti (*Lib. III. §. 23.*), duæ rectæ DK, HL erunt parallelæ (*Lib. IV. §. 10.*). Sunt autem æquales per hypothesim. Ergo duæ quoque DH, KL erunt inter se parallelæ (*Lib. V. §. 88.*). Latera autem DA, EH parallelogrammorum ABCD, EFGH coincidunt cum recta DH, quemadmodum bases CB, FG cum recta KL. Quippe si secus, latera ipsa DA, EH parallela non essent lateribus CB, FG, ut est evidens. Ergo parallelogramma ABCD, EFGH inter easdem rectas parallelas reperiuntur.

THEOREMA XI.

Parallelogramma æqualium basium, & altitudinum sunt inter se æqualia.

88. Sint duo parallelogramma DCBA, EFGH, quorum bases CB, FG æquales sint inter se, sicuti etiam ipsorum altitudines DK, HL. Dico, hujusmodi parallelogramma esse inter se æqualia. Fig. 5. Tab. V

Demonstratio I.

Ponatur basis CB $= a$, altitudo DK $= b$, basis FG $= d$, & altitudo HL $= f$, adeoque parallelogrammum DCBA $= ab$, & parallelogrammum EFGH $= df$ (§. 45.). Cum igitur sit per hypothesim $a = d$, & $b = f$, erit $ab = df$ (*Lib. I. §. 80.*). Ergo erit quoque DCBA $=$ EFGH (*Syn. Alg §. 259.*).

Demonstratio II.

Cum enim parallelogramma DCBA, EFGH sint æqualium altitudinum, erunt in iisdem rectis parallelis (§. 87.). Habent autem æquales bases per hypothesim. Ergo parallelogramma ipsa erunt æqualia (*Lib. VI. §. 34.*). Itaque parallelogramma &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Si parallelogrammum, & triangulum habuerint æquales bases, & altitudines, erit parallelogrammum duplum trianguli.

89. Ut si basis CB parallelogrammi DCBA fuerit æqualis basi FG trianguli FHG, & altitudo DK altitudini HL, erit parallelogrammum DCBA duplum trianguli FHG. Constituto namque super eandem basim FG, & sub eadem altitudine HL parallelogrammo EFGH, erit parallelogrammum DCBA æquale parallelogrammo EFGH (§. 88.). Est autem parallelogrammum EFGH duplum trianguli FHG (*Lib. VI. §. 21.*). Ergo parallelogrammum quoque DCBA duplum erit trianguli FHG (*Lib. I. §. 102.*). Fig. 5. Tab. V.

COROLLARIUM II.

Figura plana, cujus elementa decrescunt in ratione imminutæ altitudinis, est medietas illius, cujus elementa ejusdem continuo quantitatis perseverant, dummodo utriusque figuræ eadem sit basis, & altitudo.

90. Constat enim triangulum planum rectilineum esse medietatem parallelogrammi ejusdem basis, & altitudinis (§. 84.). Elementa autem trianguli continuo decrescunt pro ratione imminutæ altitudinis (§. 81.). Elementa vero parallelogrammi sunt omnia inter se æqualia (§. 43.). Ergo &c.

SCHOLION.

91. Diagonalem CB parallelogrammi ABDC parallelogrammum ipsum
Fig. 24. in duo æqualia triangula CBA, CBD dividere, etiam ex methodo indi-
Tab. III. visibilium superius exposita ad evidentiam ostenditur. Rectæ namque CD, *ef*, *cd*, *ab*, AB parallelæ inter se, sint omnia elementa parallelogrammi ABDC; atque adeo rectæ AB, *am*, *cn*, *er* elementa trianguli ACB, & rectæ CD, *rf*, *nd*, *mb* elementa trianguli CBD. Certum in primis est, elementa AB, CD esse æqualia. Certum est etiam, rectas quoque C*a*, B*f* æquales esse inter se; cum uno tantum puncto tam recta CA segmentum C*a*, quam recta BD segmentum B*f* per hypothesim excedat. Est autem *am*. *a*C = AB. AC, & *rf*. *f*B = CD. DB (§. 60.). Ergo, cum ob æqualitatem terminorum AB, CD, sicuti etiam AC, DB, sit AB. AC = CD. DB (*Lib. V.* §. 102.), erit quoque *am*. *a*C = *rf*. *f*B (*ibid.* §. 76.). Constat porro, esse *a*C = *f*B. Ergo erit etiam *am* = *rf* (*Lib. I.* §. 128). Eodem modo ostendam *cn* = *nd*, *er* = *mb*. Igitur elementa trianguli ACB sunt numero, & magnitudine æqualia elementis trianguli CBD; atque adeo triangulum ACB triangulo CBD est æquale (§. 53.). Diagonalis itaque CB parallelogrammum ABDC in duo æqualia triangula dividit.

COROLLARIUM III.

Triangula plana rectilinea sunt directe inter se, ut parallelogramma habentia æquales cum illis bases, & altitudines.

Fig. 6. 92. Ut si super eadem basi BC, & sub eadem altitudine AD fuerit
Fig. 7. parallelogrammum BCEF, & triangulum ABC; similiter super eadem ba-
Tab. V. si *bc*, & sub eadem altitudine *ad* parallelogrammum *bcef*, & triangulum *abc*, erit triangulum ABC ad triangulum *abc*, ut est parallelogrammum BCEF ad parallelogrammum *bcef*. Cum enim triangulum ABC sit medietas parallelogrammi BCEF, & triangulum *abc* parallelogrammi *bcef* (§. 89.), triangula ABC, *ab* erunt partes aliquotæ similes parallelogram-

mo-

morum BCEF, *bcef* (*Lib. I. §. 37.*), Ergo triangula ABC, *abc* sunt, ut ipsa parallelogramma BCEF, *bcef* (*Ibid. §. 126.*).

COROLLARIUM IV.

Triangula plana rectilinea æqualium basium, & altitudinum sunt æqualia.

93. Si nimirum bases CB, FG triangulorum CDB, FHG æquales fuerint inter se, sicuti etiam illorum altitudines DK, HL, duo ipsa triangula erunt æqualia. Sunt enim, ut parallelogramma DCBA, EFGH (§. 92.), quæ sunt æqualia (§. 88.). Fig. 5. Tab.V.

SCHOLION.

94. Hoc corollarium ex ipsa triangulorum genesi ostendi itidem potest. Sint enim duo triangula plana rectilinea ABC, *abc* æqualium basium BC, *bc*, & ejusdem altitudinis *ax*, in qua notentur puncta *m*, *n*, *r*. In ipsis vero triangulis distinguantur elementa DE, *de* * FG, *fg* * HK, *hk*, quæ basibus BC, *bc* parallela, eidem *respective* altitudini respondeant. Igitur cum recta HK sit parallela basi BC, triangulum AHK erit simile triangulo ABC (§. 65.), eorumque homologa latera erunt BC, HK (§. 67.). Quamobrem erit HK ad BC, ut est altitudo *ar* ad altitudinem *ax* (§. 78.). Est autem eandem ob causam etiam recta *hk* ad basim *bc* in triangulo *abc*, ut est altitudo *ar* ad altitudinem *ax* (§. 78.). Est autem eandem ob causam etiam recta *hk* ad basim *bc* in triangulo *abc*, ut est altitudo *ar* ad altitudinem *ax*. Ergo erit HK. BC $=$ *hk*. *bc* (*Lib. I. §. 76.*). Posuimus autem BC $=$ *bc*. Ergo erit quoque HK $=$ *hk* (*Ibid. §. 128.*). Eodem modo ostendam, esse FG $=$ *fg*, & DE $=$ *de*, omniaque demum elementa trianguli ABC æqualia esse elementis trianguli *abc*, alterum alteri, quæ nimirum in eadem sunt altitudine. Sunt autem hujusmodi elementa in utroque triangulo etiam numero inter se æqualia; cum tot sint in utroque, quot puncta in communi altitudine *ax* numerantur. Ergo duo triangula ABC, *abc* sunt inter se æqualia (§. 53.). Fig. 8. Tab.V.

THEOREMA XII.

Parallelogramma inæqualium basium, sed ejusdem altitudinis sunt directe inter se, ut eorum bases.

95. Super inæquales bases BC, *bc*, & sub æqualibus altitudinibus DE, *de* constituta sint duo parallelogramma ABCD, *abcd*. Dico, parallelogrammum ABCD esse ad parallelogrammum *abcd*, ut est basis BC ad basim *bc*.

Demonstratio I.

Fig. 9. Fig. 10. Tab. V. Ponatur basis BC$=y$, basis $bc=x$, altitudo DE, adeoque etiam altitudo $de=z$. Erit ergo parallelogrammum ABCD$=yz$, & parallelogrammum $abcd=xz$ (§. 45.), adeoque ABCD . $abcd=yz . xz$ (*Lib. I.* §. 102.). Est autem $yz . xz=y . x$ (*Ibid.* §. 93.). Ergo erit quoque ABCD . $abcd=y . x$ (*Ibid.* §. 77.).

Demonstratio II.

Esto basis BC parallelogrammi ABCD dupla basis bc parallelogrammi $abcd$, & ducatur recta FG, quæ bifariam dividat basim BC, sitque lateri AB, atque adeo etiam lateri DC, parallela (*Lib. IV.* §. 18.). Duo igitur parallelogramma ABGF, FGCD, utpote habentia æquales bases, & eandem altitudinem, erunt inter se æqualia (§. 88.), sicuti eandem ob causam etiam duo FGCD, $abcd$. Parallelogrammum idcirco ABCD duplum erit parallelogrammi FGCD, adeoque etiam parallelogrammi $abcd$ (*Lib. I.* §. 112.). Ergo parallelogrammum ABCD est ad parallelogrammum $abcd$, ut est basis BC ad basim bc. Itaque parallelogramma &c. quod erat ostendendum.

Corollarium I.

Triangula inæqualium basium, sed æqualium altitudinum sunt directe, ut bases.

96. Triangula nimirum BDC, bdc inæqualium basium BC, bc, sed æqualium altitudinum DE, de sunt directe inter se, ut bases BC, bc. Sunt enim, ut parallelogramma ABCD, $abcd$ super easdem bases BC, bc, & sub iisdem altitudinibus DE, de constituta (§. 92.). Fig. 9. Fig. 10. Tab. V.

Corollarium II.

Si parallelogrammum, & triangulum eandem habuerint altitudinem, sed basis trianguli fuerit dupla basis parallelogrammi, erit triangulum parallelogrammo æquale.

97. Ut si basis BC trianguli BDC fuerit dupla basis bc parallelogrammi $abcd$, æqualem habentis altitudinem de, erit triangulum BDC parallelogrammo $abcd$ æquale. Constituto namque super basi BC, & sub eadem altitudine DE parallelogrammo ABCD, erit parallelogrammum ABCD duplum parallelogrammi $abcd$ (§. 95.). Est autem parallelogrammum ABCD duplum etiam trianguli BDC (*Lib. VI.* §. 21.). Ergo triangulum BDC erit parallelogrammo $abcd$ æquale (*Lib. I.* §. 113.). Fig. 9. Fig. 10. Tab. V.

C o-

COROLLARIUM III.

Parallelogramma, ficuti etiam triangula inæqualium bafium, fed æqualium altitudinum funt refpective inter fe inæqualia.

98. Hujufmodi namque plana funt *refpective* inter fe, ut bafes.

COROLLARIUM IV.

Bafes parallelogrammorum, & triangulorum ejufdem altitudinis funt directe inter fe, ut ipfa plana refpective.

99. Nifi enim bafes parallelogrammorum, & triangulorum ejufdem altitudinis fint *directe* inter fe, ut ipfa plana *refqective*, neque plana hujufmodi effe poffunt inter fe *directe*, ut bafes.

THEOREMA XIII.

Parallelogramma æqualium bafium, fed inæqualium altitudinum, funt directe inter fe, ut ipfæ altitudines.

100. Super æquales bafes BC, *bc*, & fub inæqualibus altitudinibus DD, *dd* conftituta habeantur duo parallelogramma ABCD, *abcd*. Dico, parallelogrammum ABCD effe ad parallelogrammum *abcd*, ut eft altitudo DD ad altitudinem *dd*. Fig. 11. Fig. 12. Tab. V.

Demonftratio.

Coincidit cum demonftratione theorematis præcedentis, fi altitudines fpectentur, ut bafes, & bafes, ut altitudines.

COROLLARIUM I.

Triangula æqualium bafium, fed inæqualium altitudinum funt directe, ut altitudines.

101. Videlicet triangula BDC, *bdc* æqualium bafium BC, *bc*, fed inæqualium altitudinum DD, *dd* funt directe inter fe, ut ipfæ altitudines DD, *dd*. Ipfa namque triangula funt, ut parallelogramma ABCD, *abcd* (§. 92.). Fig. 11. Fig. 12. Tab. V.

COROLLARIUM II.

Si parallelogrammum, & triangulum eandem habuerint basim, sed altitudo trianguli fuerit dupla altitudinis parallelogrammi, erit triangulum parallelogrammo æquale.

102. Ut si altitudo DD trianguli BDC fuerit dupla altitudinis *dd* paral-
Fig. 11. lelogrammi *abcd*, æqualem basim *bc* cum ipso triangulo habentis, erit
Fig. 12. triangulum BDC parallelogrammo *abcd* æquale. Hac enim stante hypothesi
Tab. V. parallelogrammum ABCD eandem basim habens, atque altitudinem cum triangulo BDC, est in eadem ratione ad triangulum BDC, & ad ipsum parallelogrammum *abcd*, scilicet dupla (*Lib. VI. §. 21. & §. 100. hujus*). Ergo triangulum BDC æquabit parallelogrammum *abcd* (*Lib. I. §. 113.*).

COROLLARIUM III.

Parallelogramma, sicuti etiam triangula æqualium basium, & inæqualium altitudinum sunt respective inter se inæqualia.

103. Sunt enim tam parallelogramma, quam triangula, ut altitudines.

COROLLARIUM IV.

Altitudines parallelogrammorum, & triangulorum æquales bases habentium sunt directe inter se, ut ipsa plana respective.

104. Enimvero quemadmodum hujusmodi plana sunt *directe* inter se, ut altitudines, ita vicissim altitudines erunt, ut ipsa plana *respective*, si eorum bases fuerint inter se æquales.

THEOREMA XIV.

Parallelogramma inæqualium basium, & altitudinum sunt in ratione composita basium, & altitudinum.

105. Super inæquales bases BC, *bc*, & sub inæqualibus altitudinibus
Fig. 6. AD, *ad* constituta habeantur duo parallelogramma BCEF, *bcef*. Dico, pa-
Fig. 7. rallelogrammum BCEF esse ad parallelogrammum *bcef* in ratione com-
Tab. V. posita ex ratione basis BC ad basim *bc*, & ex ratione altitudinis D ad altitudinem *ad*.

Demon-

Demonstratio I.

Ponatur basis BC$=m$, altitudo AD$=x$, basis $bc=n$, & altitudo $ad=y$. Erit ergo parallelogrammum BCEF$=mx$, & parallelogrammum $bcef=ny$ (§. 45.); atque adeo BCEF. $bcef=mx.ny$ (*Lib. I* §. 102.). Est autem mx ad ny in ratione composita ex ratione primæ m ad tertiam n, & ex ratione secundæ x ad quartam y (*Ibid.* §. 169.). Ergo parallelogrammum quoque BCEF erit ad parallelogrammum $bcef$ in ratione composita ex ratione basis BC ad basim bc, & ex ratione altitudinis AD ad altitudinem ad. Itaque parallelogramma &c. quod erat ostendendum.

Demonstratio II.

Ducta recta MP parallela basi BC ad altitudinem ND altitudini ad parallelogrammi fc æqualem, ut proinde parallelogrammum PMBC sit æqualis altitudinis cum parallelogrammo fc, ponatur basis bc ad basim BC, ut quantitas x ad quantitatem y, & altitudo ND, sive ad, ad altitudinem AD, ut quantitas y ad quantitatem z. Itaque cum parallelogramma fc, MC habeant æquales altitudines, erit parallelogrammum fc ad parallelogrammum MC, ut basis bc ad basim BC (§. 95.), sive ut quantitas x ad quantitatem y. Similiter cum parallelogramma MC, FC habeant eandem basim, erit parallelogrammum MC ad parallelogrammum FC, ut altitudo ND ad altitudinem AD (§. 100.), sive ut quantitas y ad quantitatem z. Ergo ex *æqualitate rationis* erit parallelogrammum fc ad parallelogrammum FC, ut prima x trium x, y, z ad tertiam z ((*Lib. I.* §. 179.). Est autem x ad z in ratione composita ex ratione primæ x ad secundam y, & ex ratione secundæ y ad tertiam z (*Ibid.* §. 176.). Ergo parallelogrammum quoque fc erit ad parallelogrammum FC in ratione composita ex ratione basis bc ad basim BC, & ex ratione altitudinis ad ad altitudinem AD.

C O R O L L A R I U M.

Triangula inæqualium basium, & altitudinum sunt in ratione composita basium, & altitudinum.

106. Videlicet triangula BAC, bac inæqualium basium BC, bc & altitudinum AD, ad sunt inter se in ratione composita ex ratione basium BC, bc, & ex ratione altitudinum AD, ad. Sunt enim, ut parallelogramma BCEF, $bcef$ super easdem bases BC, bc, & sub iisdem altitudinibus AD, ad constituta (§. 92.). Fig. 6. Fig. 7. Tab. IV.

THEOREMA XV.

Si fuerint quatuor rectæ lineæ geometrice proportionales, rectangulum contentum sub extremis erit æquale rectangulo contento sub mediis.

107. Sint quatuor rectæ lineæ A, B, C, D geometrice proportionales, esto nimirum A. B=C. D. Ex duabus autem extremis A, D fiat rectangulum HLXL, & ex mediis B, C rectangulum EGHF, ita nimirum ut sit HK=A, HL=D, FH=C, & GH=B. Dico, rectangulum HLXK æquale esse rectangulo EGHF.

Fig. 13. Tab. V.

Demonstratio I.

Facta hypothesi, ut sit recta A=*m*, recta B=*n*, recta C=*x*, & recta D=*y*, atque adeo *m*. *n*=*x*. *y*, erit rectangulum HLFK=*my*, & rectangulum EGHF=*nx* (§. 45.), adeoque HLXK. EGHF=*my*. *nx* (*Lib. I.* § 102.). Est autem *my*=*nx* (*ibid.* §. 82.). Ergo erit quoque HLXK=EGHF (*ibid.* §. 45.).

Demonstratio II.

Duo rectangula HLXK, EGHF ita jungantur in puncto H, ut angulus FHK sit rectus; latus autem HK sit æquale rectæ A, latus HG rectæ B, latus FH rectæ C, & latus HL rectæ D. Tum directe productis lateribus EF, XK, donec uniantur in puncto Y, fiat quadrilaterum FHKY. Quoniam igitur duo anguli GHF, FHK per hypothesim sunt recti, duæ rectæ GH, HK erunt in directum positæ (*Lib.* III. §. 49.), quemadmodum eandem ob causam etiam rectæ FH, HL. Cumque parallela sibi mutuo sint tam duo latera EF, GH, quam duo HL, KX, parallela quoque erunt tam duo FY, HK, quam duo FH, YK; atque adeo quadrilaterum FHKY erit parallelogrammum (*Lib. VI.* §. 8.). Itaque cum parallelogramma HY, HE sint sub eadem altitudine, utpote inter easdem rectas parallelas EY, GK constituta, parallelogrammum HY erit ad parallelogrammum HE, ut est basis HK ad basim HG (§. 39.), sive ut recta A ad rectam B. Eadem ratione parallelogrammum HY erit ad parallelogrammum HX, ut basis FH ad basim HL, sive ut recta C ad rectam D. Est autem A. B=C. D per hypothesim. Ergo parallelogrammum HY eandem habet rationem ad utrumque parallelogrammum HE, HX. Quamobrem duo parallelogramma HE, HX sunt inter se æqualia (*Lib.* I. §. 113.). Si fuerint ergo quatuor rectæ lineæ &c. quod erat ostendendum.

Corollarium I.

Si ex quatuor rectis lineis geometrice proportionalibus fiant duo parallelogramma, quorum alterum habeat primam illarum rectarum pro basi, & quartam pro altitudine, alterum pro basi habeat secundam, & tertiam pro altitudine, duo illa parallelogramma erunt aequalia.

108. Si nimirum ex quatuor rectis A, B, C, D proportionalibus, quae nimirum sic se habeant, ut sit A. B==C. D, fiant duo parallelogramma HLXM, FGNO ea quidem lege ut basis LX sit aequalis primae A, & altitudo MN quartae D, basis GN sit aequalis secundae B, & altitudo OP tertiae C, duo parallelogramma HLXM, FGNO erunt aequalia. Constitutis namque super easdem bases LX, GN, & sub iisdem altitudinibus MN, OP duobus rectangulis YLXK, EGNF, rectangulum YLXK erit aequale parallelogrammo HLXM, & rectangulum EGNF parallelogrammo FGNO (§. 88.). Est autem rectangulum YLKX aequale rectangulo EGNF (§.107.). Ergo parallelogrammum quoque HLXM parallelogrammo FGNO aequale erit (*Syn. Alg.* §. 259.). Fig. 14. Fig. 15. Tab. V.

Corollarium II

Parallelogramma reciprocantia sibi mutuo bases, & altitudines sunt aequalia.

109. Aequalia nimirum sunt duo parallelogramma HLXM, FGNO, si fuerit basis LX ad basim GN, ut est altitudo OP ad altitudinem MN. Patet ex praecedenti. Fig. 14. Fig. 15. Tab. V.

Corollarium II.

Triangula reciprocantia sibi mutuo bases, & altitudines sunt aequalia.

110. Ut si basis BC trianguli BAC fuerit ad basim *bc* trianguli *bac*, quemadmodum altitudo *ae* ad altitudinem AE, triangula BAC, *bac* erunt aequalia. Sunt enim inter se, ut parallelogramma DBCA, *dbca*, (§. 92.), quae sunt aequalia (§. 109.). Fig. 1. Fig. 2. Tab. IV.

Corollarium IV.

Si fuerint tres rectae lineae continuo geometrice proportionales, rectangulum contentum sub extremis est aequale quadrato mediae.

111. Ut si fuerint tres rectae A, B, C continuo geometrice proportionales, rectangulum contentum sub extremis A, C erit aequale quadrato mediae B. Posita namque recta D, quae sit aequalis secundae B, erit A. B==D. C, atque

Fig. 17. Tab. V. atque adeo rectangulum contentum sub extremis A, C æquale rectangulo contento sub mediis B, D (§. 107.). Rectangulum autem contentum sub mediis B, D est quadratum mediæ B; cum sit per hypothesim B=D. Ergo &c.

S C H O L I O N.

112. Hinc brevius ostenditur, *in omni triangulo rectangulo quadratum hypotenusæ æquare quadrata laterum simul sumta*. Ducatur enim ab angulo recto BAC trianguli rectanguli BAC ad basim BC recta perpendicularis AO. Erit AC media proportionalis inter totam basim BC, & segmentum
Fig. 17. Tab. II. OC, & BA erit media proportionalis inter totam basim BC, & segmentum BO (§. 73.). Igitur quadratum ACKH erit æquale rectangulo OLEC contento sub segmento OC, & recta CE ipsi BC æquali, & quadratum FBAG erit æquale rectangulo BOLD, quod sub segmento BO, & recta BD, sive BC, cui illa æqualis est, continetur (§. 111.). Duo igitur quadrata ACKH, FBAG simul sumta, æqualia sunt rectangulis OLEC, BOLD simul itidem sumtis. Quadratum autem BDEC hypotenusæ BC est æquale rectangulis OLEC, BOLD (*Syn. Alg.* §. 256.). Ergo duobus similiter quadratis ACKH, FBAG simul sumtis quadratum ADEC æquale erit (*ibid.* §. 261.).

C O R O L L A R I U M V.

Quadratum rectæ in semicirculo perpendiculariter insistentis diametro est æquale rectangulo contento sub segmentis ipsius diametri.

113. Quadratum, scilicet rectæ AE in semicirculo BAC perpendiculariter insistentis diametro BC, adæquat rectangulum contentum sub segmentis
Fig. 16. Tab. IV. BE, EC ipsius diametri BC. Recta namque AE est media proportionalis inter segmenta BE, EC ipsius diametri (§. 74.).

T H E O R E M A XVII.

Si datis quatuor rectis lineis, rectangulum contentum sub extremis æquale fuerit rectangulo contento sub mediis, quatuor illæ lineæ erunt geometrice proportionales.

114. Sint quatuor rectæ A, B, C, D. Ex duabus autem extremis A, D fiat rectangulum HLXK, & ex mediis B, C rectangulum EGHF, ita ni-
Fig. 13. Tab. V. mirum ut latus HK sit æquale rectæ A, latus HL rectæ D, latus FH rectæ C, & latus HG rectæ B. Rectangulum porro HLXK sit æquale rectangulo EGHF. Dico, rectas A, B, C, D esse geometrice proportionales.

Demon-

Demonstratio I.

Ponatur recta A=m, recta B=n, recta C=x, & recta D=y, atque adeo rectangulum HLXK=my, & rectangulum EGHF=nx (§. 45.); ac proinde HLXK. EGHF=my. nx (*Lib. I. §.* 102.). Quoniam igitur habetur per hypothesim HLXK=EGHF, erit quoque my=nx (*Ibid. §.* 45.); ac proinde m. n=x. y (*Ibid §.* 84.). Quamobrem erit etiam A. B=C. D.

Demonstratio II.

Duo rectangula HLXK, EGHF ita jungantur in puncto H, ut angulum rectum FHK in illo constituant. Tum lateribus EF, XK in directum productis, fiat quadrilaterum FHKY, quod erit parallelogrammum (*Lib. VI. §.* 8.), cum duæ HL, KX, sicuti etiam duæ EF, GH sint parallelæ (*Ibid. §* 9.). Quoniam igitur duo anguli GHF, FHK sunt recti, quemadmodum etiam duo FHK, KHL, tam duæ rectæ GH, HK, quam duæ FH, HL erunt in directum positæ (*Lib. III. §.* 49.). Quamobrem duo parallelogramma EGHF, FHKY erunt ejusdem altitudinis, utpote in iisdem parallelis constituta, sicuti eandem ob causam etiam duo FHKY, HLXK. Parallelogrammum ergo FHKY erit ad parallelogrammum EGHF, ut est basis HK ad basim HG, & parallelogrammum FHKY erit ad parallelogrammum HLXK, ut est basis FH ad basim HL (§ 95.), sive ratio basis HK ad basim HG eadem erit cum ratione parallelogrammi FHKY ad parallelogrammum EGHF, & ratio basis FH ad basim HL eadem cum ratione parallelogrammi FHKY ad parallelogrammum HLXK. Eadem autem est ratio parallelogrammi FHKY ad utrumque parallelogrammum EGHF, HLXK (*Lib. I. §.* 112.); cum duo parallelogramma EGHF, HLXK posita sint æqualia. Ergo ratio quoque basis HK ad basim HG eadem erit cum ratione basis FH ad basim HL (*Ibid. §.* 76.); seu erit HK. HG=FH. HL; ac proinde, cum sit HK=A, HG=B, FH=C, & HL=D per constructionem, erit A. B=C. D. Itaque si datis &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Rectangula æqualia habent latera reciproce proportionalia.

115. Demonstravimus enim, in rectangulis æqualibus EGHF, HLXK latus LX esse ad latus GH, ut est latus EG ad latus HL. Fig. 13. Tab. V.

COROLLARIUM II.

Parallelogramma æqualia reciprocant sibi mutuo bases, & altitudines.

116. Ut si parallelogramınum HLXM æquale fuerit parallelogrammo FGNO, altitudo OP parallelogrammi FGNO erit ad altitudinem MN parallelogrammi HLXM, ut est hujus basis LX ad illius basim GN. Enimvero constitutis super easdem bases, & sub iisdem altitudinibus rectangulis YLXK, EGNF, erit rectangulum YLXK æquale parallelogrammo HLXM, & rectangulum EGNF parallelogrammo FGNO (§. 87.). Duo autem parallelogramma HLXM, FGNO posita sunt æqualia. Ergo duo quoque rectangula YLXK, EGNF inter se æqualia erunt (*Syn. Alg.* § 159.). Est autem latus FN rectanguli EGNF ad latus KX rectanguli YLXK, ut est latus LX ad latus GN (§. 15.); suntque latera FN, KX æqualia altitudinibus OP, MN parallelogrammorum FGNO, HLXM per hypothesim, & latera LX, GN sunt eorundem bases. Ergo æqualia parallelogramma HLXM, FGNO reciprocant sibi mutuo bases, & altitudines.

Fig. 14. Fig. 15. Tab. V.

COROLLARIUM III.

Triangula æqualia reciprocant sibi mutuo bases, & altitudines.

117. Si nimirum æqualia inter se mutuo fuerint triangula ABC, *abc*, erit altitudo *ae* ad altitudinem AE, ut est basis BC ad basim *bc*. Constitutis namque super easdem bases, & sub iisdem altitudinibus parallelogrammis DBCA, & *dbca*, hæc erunt æqualia (*Lib.* I. §. 103.), utpote eandem rationem habentia ad æqualia ipsa triangula (§. 89.). Parallelogramma autem DBCA, *dbca* reciprocant sibi mutuo bases, & altitudines (§. 116.). Ergo ipsa quoque triangula bases, & altitudines, cum istæ ab illis diversæ non sint, sibi mutuo reciprocabunt.

Fig. 1. Fig. 2. Tab. IV.

COROLLARIUM IV.

Si quadratum fuerit rectangulo æquale, latus quadrati erit media proportionalis inter latera ipsius rectanguli.

118. Si nimirum quadratum ABCD fuerit æquale rectangulo EGNF, latus BC ipsius quadrati erit *media proportionalis* inter latera EG, GN dati rectanguli. Constat enim, latus sive basim GN rectanguli EGNF esse ad latus, sive ad basim BC quadrati ABCD, ut est ejusdem quadrati latus sive altitudo DC ad latus sive ad altitudinem EG ipsius rectanguli (§. 115.). Est autem latus BC lateri DC æquale (*Lib. VI.* §. 2.). Ergo latus BC quadrati ABCD erit *media proportionalis* inter latera EG, GN rectanguli EGNF.

Fig. 15. Fig. 16. Tab. V.

THEO.

THEOREMA XVII.

Quadrilatera, & polygona similia in totidem ex aequo similia triangula resolvi possunt.

I.

119. Sint duo quadrilatera similia ABCD, *abcd*, habentia nimirum aequales angulos DAB, *dab* * ABC, *abc* * BCD, *bcd* * CDA, *cda*, & latera circa illos proportionalia. Ab angulis autem aequalibus D, *d* ad aequales oppositos B, *b* ducantur rectae DB, *db*, atque adeo duo ipsa quadrilatera in duo triangula sint divisa. Dico, triangulum DBA simile esse triangulo *dba*, & triangulum DBC triangulo *dbc*. Fig. 1. Fig. 2. Tab. V.

Demonstratio.

Angulus namque BAD trianguli DBA aequalis positus est angulo *bad* trianguli *dba*, & latera circa illos proportionalia. Ergo duo triangula DBA, *dba* sunt similia (§. 69.). Eodem modo ostendam, similia esse duo quoque triangula BDC, *bdc*. Igitur &c.

II.

120. Duo pentagona ABCDE, *abcde* sint similia, aequales nempe sint ipsorum anguli ABC, *abc* * BCD, *bcd* * CDE, *cde* * DEA, *dea* * EAB, *eab*, & latera circa illos proportionalia. Dico, ipsa pentagona in totidem ex aequo similia triangula resolvi posse. Fig. 18. Fig. 19. Tab. V.

Demonstratio.

Supra homologa ipsorum latera CD, *cd* habeantur duo similia triangula CMD, *cmd*, quorum aequales anguli sint MDC, *mdc* * MCD, *mcd* * CMD, *cmd*, & homologa latera MD, *md* * MC, *mc* * CD, *cd*. Tum ex illorum apicibus M, *m* ad singulos ipsorum pentagonorum angulos ducantur rectae ME, MA, MB, *me*, *ma*, *mb*. Quoniam igitur duo anguli CDE, *cde* aequales sunt inter se, sicuti etiam duo CDM, *cdm*, reliquus itidem MDE reliquo *mde* aequalis erit (*Lib. V.* §. 46.). Sunt autem latera circa illos proportionalia, videlicet MD. DE = *md*. *de* (quandoquidem, cum propter triangulorum CMD, *cmd* similitudinem jam sit MD. *md* = CD. *cd*, sicuti etiam propter similitudinem polygonorum habeatur ED. *ed* = CD. *cd* (§. 77.), erit quoque MD. *md* = ED. *ed* (*Lib. I.* §. 76.); ac proinde MD. ED = *md*. *ed* (*Ibid.* §. 125.). Igitur duo triangula MED, *med* erunt sibi mutuo similia (§. 69.). Eodem modo hinc ostendam, similia esse etiam duo EMA, *ema* tum duo AMB, *amb*, ac demum duo BMC, *bmc*. Haec autem

autem triangula tot sunt in utroque pentagono, quot sunt ipsorum latera. Ergo duo similia pentagona ABCDE, *abcde* in totidem ex æquo similia triangula resolvi possunt. Quadrilatera igitur, & polygona similia &c. quod erat ostendendum.

SCHOLION.

121. Aliter quoque fieri potest resolutio polygonorum similium in triangula numero æqualia, & magnitudine similia. Sint enim duo similia pentagona ABCDE, *abcde*, quorum æquales anguli sint ABC, *abc* * BCD,
Fig. 17. Fig. 18. Tab. IV. *bcd* * CDE, *cde* * DEA, *dea* * EAB, *eab*, & latera circa illos proportionalia. Ducantur autem ab æqualibus angulis A, *a* ad æquales C, *c*, necnon ad æquales D, *d* rectæ AC, *ac* * AD, *ad*. Quoniam igitur anguli ABC, *abc* sunt æquales, & latera circa illos proportionalia, duo triangula ACB, *acb* erunt similia (§. 69.). Rursus cum, ob similitudinem ipsorum triangulorum ACB, *acb*, anguli BCA, *bca* sint æquales (§ 1.), & per hypothesim æquales sint anguli BCD, *bcd*, ablatis æqualibus BCA, *bca*, erit reliquus ACD reliquo *acd* æqualis (*Syn. Alg.* §. 266.). Constat autem, esse BC. *bc*=CD. *cd* (§. 77.), cum hujusmodi latera sint homologa, eandemque ob causam etiam AC. *ac*=BC. *bc*. Ergo erit quoque AC. *ac*=CD. *cd* (*Lib. I.* §. 76.); ac proinde AC. CD=*ac*. *cd* (*Ibid.* §. 125.). Quamobrem duo triangula ACD, *acd* habent angulos ACD, *acd* æquales, & latera circa illos proportionalia. Igitur sunt sibi mutuo similia (§. 77.). Eodem modo demonstrabuntur similia duo quoque triangula ADE, *ade*. Igitur &c.

COROLLARIUM.

Polygona regularia ejusdem generis in totidem ex æquo similia triangula resolvi possunt.

122. Polygona siquidem regularia ejusdem generis sunt sibi mutuo similia (§. 3.).

LEMMA III.

Polygonum quodcunque regulare in totidem triangula isoscelia æqualia resolvi potest, quot sunt ipsius latera.

123. Esto pentagonum regulare ABCDE, cujus centrum sit punctum M.
Fig. 18. Tab. V. Dico, illud in quinque triangula isoscelia æqualia resolvi posse.

Demon-

Demonstratio.

Ex illius centro M ad singulos ejusdem angulos ducantur radii MA, MB, MC, MD, ME. Manifestum est, pentagonum divisum esse in quinque triangula, quot nimirum sunt ipsius latera. Bases autem horum omnium triangulorum, videlicet AB, BC, CD, DE, EA æquales sunt inter se (*Lib. V.* §. 20.), sicuti etiam ipsorum latera MA, MB, MC, MD, ME (§. 19.). Ergo omnia illa triangula sunt isoscelia (*Lib. V.* §. 25.), atque omnino inter se æqualia (*ibid.* §. 84.). Polygonum itaque regulare &c. quod erat ostendendum.

Corollarium I.

Anguli verticales isoscelium triangulorum, in quæ polygonum regulare dividitur, sunt omnes inter se æquales.

124. Æquales nimirum sunt omnes anguli verticales CMD, DME, EMA, AMB, BMC isoscelium triangulorum, in quæ divisum est pentagonum regulare ABCDE. Habent enim ipsa triangula tum bases, tum latera inter se æqualia. Fig. 18. Tab. V.

Corollarium II.

Angulus verticalis singulorum isoscelium triangulorum, in quæ polygonum regulare dividitur, eam habet rationem ad quatuor rectos, quam ipsius trianguli basis, sive polygoni latus ad totum ejusdem perimetrum.

125. Angulus nempe verticalis CMD trianguli CMD eam habet rationem ad quatuor rectos, quam latus, sive basis CD ipsius trianguli ad totum pentagoni ABCDE perimetrum. Cum enim omnes anguli verticales isoscelium triangulorum, in quæ pentagonum ABCDE resolvitur, sint æquales inter se (§. 124.), totque sint ipsa triangula, atque adeo tot sint ipsi anguli verticales ad centrum M existentes, quot sunt ipsius pentagoni latera, quæ itidem omnia inter se sunt æqualia (*Lib. V.* §. 20.), erit angulus CMD quinta pars quatuor rectorum, qui circa punctum M fieri possunt (*Lib. III.* §. 44.), quemadmodum latus CD est quinta pars totius perimetri ABCDE. Ergo ratio anguli CMD ad quatuor rectos diversa ab ea non est, quam habet latus CD ad totum pentagoni perimetrum ABCDE. Fig. 18. Tab. V.

THEO-

THEOREMA XVIII.

Si ex centro polygonorum regularium ejusdem generis ad singulos ipsorum angulos radii ducantur, divisa erunt ipsa polygona in totidem ex æquo triangula sibi mutuo similia.

126. Sint duo pentagona regularia ABCDE, *abcde*. Ex centro autem M pentagoni ABCDE ducantur ad singulos ipsius angulos radii MA, MB,
Fig. 18. Fig. 19. Tab. V. MC, MD, ME, & ex centro *m* pentagoni *abcde* ad ejus angulos radii *ma*, *mb*, *mc*, *md*, *me*; ut proinde divisum sit utrumque pentagonum in quinque triangula. Dico, hujusmodi triangula esse sibi mutuo similia.

Demonstratio.

Cum enim triangula, in quæ divisum est pentagonum ABCDE sint isoscelia æqualia, sicuti etiam triangula, in quæ pentagonum *abcde* est divisum (§. 123.), angulus verticalis CMD trianguli CMD erit ad quatuor rectos, ut est basis CD ad totum perimetrum ABCDE (§. 125.). Eadem ratione angulus verticalis *cmd* trianguli *cmd* erit ad quatuor rectos, ut ejus basis *cd* ad totum perimetrum *abcde*. Eadem est autem ratio utriusque lateris CD, *cd* ad suum respective perimetrum, nempe *subquintupla*. Ergo eadem quoque erit ratio utriusque anguli CMD, *cmd* ad quatuor rectos; atque adeo duo ipsi anguli erunt æquales (*Lib. I.* §. 103.). Constat autem, esse latus MC ad latus MD, ut est latus *mc* ad latus *md*; cum sit MC=MD, & *mc*=*md* (§. 19.). Ergo duo triangula CMD, *cmd* sunt sibi mutuo similia (§. 69.). Singula porro triangula, in quæ divisum est pentagonum ABCDE, isoscelia sunt, & omnino inter se æqualia, sicuti etiam singula, in quæ divisum est pentagonum *abcde* (§. 123.). Ergo singula singulis sunt similia. Itaque si a centro polygonorum &c. quod erat &c.

COROLLARIUM.

Radii polygonorum regularium ejusdem generis sunt latera homologa triangulorum isoscelium similium, in quæ illorum ope ipsa polygona resolvuntur.

127. Radii nimirum MC, *mc* pentagonorum regularium ABCDE, *abcde* sunt latera homologa triangulorum similium CMD, *cmd*. Æqualibus namque angulis MDC, *mdc* opponuntur. Idipsum de aliis dicito.

THEO.

THEOREMA XIX.

Radii, & cateti polygonorum regularium ejusdem generis sunt directe inter se, ut duo qualibet homologa ipsorum latera.

Sint duo pentagona regularia ABCDE, *abcde*, quorum radii sint rectæ MC, *mc*; cateti vero rectæ MN, *mn*. Fig. 18. Fig. 19. Tab. V.

I.

128. Dico primo, radium MC esse ad radium *mc*, ut latus CD ad latus sibi homologum *cd*.

Demonstratio.

Ductis radiis MD, *md*, duo triangula CMD, *cmd* sunt similia (§. 126.), eorumque latera homologa sunt radii MC, *mc* (§. 127.). Eadem autem est ratio omnium laterum homologorum in triangulis similibus (§. 77.). Ergo erit MC. *mc* = CD. *cd*.

II.

129. Dico secundo, catetum quoque MN esse ad catetum *mn*, ut latus CD ad latus sibi homologum *cd*.

Demonstratio.

Cateti MN, *mn* sunt altitudines triangulorum similium CMD, *cmd* (§. 24.). Ergo ipsi cateti MN, *mn* erunt inter se, ut latera homologa CD. *cd* (§. 78.). Itaque radii, & cateti &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Cateti polygonorum regularium ejusdem generis sunt directe inter se, ut ipsorum radii.

130. Cum enim tam radii, quam cateti sint inter se, ut duo quælibet homologa ipsorum polygonorum latera, radiorum, & catetorum in polygonis regularibus ejusdem generis eadem quoque erit ratio (*Lib.* I. §. 176.).

THEOREMA XX.

Perimetri duarum figurarum rectilinearum similium sunt directe inter se, ut duo qualibet homologa ipsorum latera.

Fig. 18. Fig. 19 Tab. V. 131. Sint duæ figuræ rectilineæ similes ABCDE, *abcde*, quorum homologa latera sint AB, *ab* * BC, *bc* * CD, *cd* * DE, *de* * EA, *ea*. Dico, perimetrum ABCDE esse ad perimetrum *abcde*, ut duo qualibet homologa ipsorum latera CD, *cd*.

Demonstratio.

Cum enim per hypothesim sit CD. *cd* = DE. *de* = EA. *ea* = AB. *ab* = BC. *bc* (§. 77.), erit CD + DE + EA + AB + BC. *cd* + *de* + *ea* + *ab* + *bc* = CD. *cd* (*Lib. I. §.* 144.). Est autem ABCDE = CD + DE + EA + AB + BC, & *abcde* = *cd* + *de* + *ea* + *ab* + *bc* (*Syn. Alg. §.* 256.). Ergo erit ABCDE. *abcde* = CD. *cd*. Perimetri ergo &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Perimetri polygonorum regularium ejusdem generis sunt directe inter se, ut duo qualibet ipsorum latera.

132. Polygona siquidem regularia ejusdem generis sunt similia (§. 3.), & & quodlibet latus unius est homologum cuilibet lateri alterius (§ 4.).

COROLLARIUM II.

Perimetri polygonorum regularium ejusdem generis sunt directe inter se, ut ipsorum radii, & cateti.

133. Videlicet perimeter pentagoni regularis ABCDE est ad perimetrum pentagoni itidem regularis *abcde*, ut radius MC ad radium *mc*, sicuti etiam ut catetus MN ad catetum *mn*. Cum enim sit ABCDE. *abcde* = CD. *cd* (§ 131.), & MC. *mc* = CD. *cd* (§. 128.), necnon MN. *mn* = CD. *cd* (§. 129), erit quoque ABCDE. *abcde* = MC. *mc*, sicuti etiam ABCDE. *abcde* = MN. *mn* (*Lib. I. §.* 78.).

THEO-

THEOREMA XXI.

Inæqualium circulorum æquales anguli tum ad centrum, tum ad peripheriam similibus arcubus insistunt; & vicissim anguli tam ad centrum, quam ad peripheriam, qui similibus arcubus insistunt, inter se sunt æquales.

I.

134. Sint duo inæquales circuli ADC, *adc*, ad quorum centrum E, *e* habeantur æquales anguli AEC, *aec*. Dico, arcus ABC, *abc*, quibus illi insistunt, esse inter se æquales. Fig. 1. Fig. 2. Tab. VI.

Demonstratio.

Cum enim anguli AEC, *aec* sint æquales, eandem ad quatuor rectos rationem habebunt (*Lib.* I. §. 102.). Est autem arcus ABC ad totam peripheriam ADB, ut angulus AEC ad quatuor rectos, sicuti etiam arcus *abc* ad totam peripheriam *adb*, ut angulus *aec* ad quatuor rectos (*Lib.* VII. §. 28.) Ergo eadem erit ratio utriusque arcus ABC, *abc* ad totam sui circuli peripheriam; atque adeo arcus ipsi ABC, *abc* sunt sibi mutuo similes (§. 5.).

II.

135. Æquales modo sint anguli ADC, *adc* ad peripheriam. Dico, arcus ABC, *abc*, quibus insistunt, esse sibi mutuo similes.

Demonstratio.

Constitutis namque ad centrum angulis AEC, *aec*, qui iisdem arcubus ABC, *abc* insistant, cum angulus AEC duplus sit anguli ADC, & angulus *aec* anguli *adc* (*Lib.* VII. §. 71.), quemadmodum duo anguli ADC, *adc* positi sunt inter se æquales, ita duo AEC, *aec* inter se æquales erunt (*Lib.* I. §. 103.). Ergo arcus ABC, *abc* erunt sibi mutuo similes (§. 134.).

III.

136. Vicissim autem similes sint sibi mutuo arcus ABC, *abc*. Dico, angulos ad centrum AEC, *aec* illis insistentes esse inter se æquales.

Demonstratio.

Etenim ob similitudinem arcuum ABC, *abc*, eadem erit utriusque ratio ad totam sui circuli peripheriam (§. 5.). Est autem uterque angulus AEC, *aec* ad quatuor rectos, ut sunt arcus ABC, *abc* ad integram peripheriam sui

circuli (*Lib. VII. §.* 28.). Ergo uterque angulus AEC, *aec* eandem ad quatuor rectos rationem habebit; atque adeo erunt inter se æquales (*Lib.* I. *§.* 103.).

I V.

137. Demum duo anguli ad peripheriam positi ADC, *adc* similibus arcubus ABC, *adc* insistant. Dico, angulos ADC, *adc* esse inter se æquales.

Demonstratio.

Enimvero, si ad centrum ipsorum circulorum constituantur duo anguli AEC, *aec* iisdem insistentes arcubus ABC, *abc*, duo ipsi anguli AEC, *aec* erunt inter se æquales (*§.* 36.). Est autem angulus ADC medietas anguli AEC, & angulus *adc* anguli *aec* (*Lib. VII. §.* 71.). Ergo duo quoque anguli ADC, *adc* inter se æquales erunt (*Lib.* I. *§.* 103.). Inæqualium itaque circulorum &c. quod erat ostendendum.

C o r o l l a r i u m.

Si fuerint duo, vel plures circuli concentrici, ex quorum communi centro ad majoris peripheriam duo radii ducantur, arcus, quos illi intercipiunt, erunt sibi mutuo similes.

Fig. 3. Tab. IV. 138. Similes nimirum sibi mutuo erunt arcus AC, EF circulorum concentricorum ABC, EFG, quos intercipiunt radii DA, DC. Idem siquidem angulus ADC ad commune centrum positus utrique arcui insistit.

T H E O R E M A XXII.

Arcus inæqualium circulorum, qui æquales angulos capiunt, sunt sibi mutuo similes. Et vicissim arcus similes inæqualium circulorum æquales angulos comprehendunt.

I.

Fig. 1. Fig. 2. Tab. VI. 139. Æquales sint anguli ABC, *abc*, quos capiunt arcus ABC, *abc* circulorum inæqualium ADC, *adc*. Dico, arcus ABC, *abc* esse sibi mutuo similes.

Demonstratio.

Sumantur in peripheriis ipsorum circulorum puncta D, *d*, atque ab his ad extrema arcuum ABC, *abc* ducantur duæ rectæ DA, DC, *da*, *dc*, constitutaque sint duo quadrilatera ADCB, *adcb*. Quoniam igitur tam duo anguli ABC, ADC, quam duo *abc*, *adc* valent duos rectos (*Lib. VII. §.* 82.), duo anguli ABC, ADC duobus *abc*, *adc* æquales erunt (*Syn. Alg. §.* 259.). Duo autem

autem ABC, *abc* positi sunt æquales. Ergo duo quoque ADC, *adc* inter se æquales erunt (*ibid.* §. 266.); duoque idcirco arcus ABC, *abc*, quibus insistunt, erunt sibi mutuo similes (§. 135.).

II.

140. Vicissim vero similes sint arcus ABC, *abc*. Dico, angulos ABC, *abc*, quos arcus ipsi comprehendunt, esse inter se æquales.

Demonstratio.

Etenim iisdem positis; stante similitudine arcuum ABC, *abc*, anguli ADC, *adc* erunt æquales (§. 137.). Sunt autem duo anguli ABC, ADC æquales duobus *abc*, *adc* (*Syn. Alg.* §. 259.); cum tam illi, quam isti valeant duos rectos (*Lib. VII.* §. 82.). Ergo sublatis æqualibus ADC, *adc*, reliquus ABC reliquo *abc* æqualis erit (*Syn. Alg.* §. 266.). Arcus itaque inæqualium &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Si inæqualibus circulis demantur arcus similes, qui remanent, arcus sibi quoque mutuo erunt similes.

141. Si nimirum inæqualibus circulis ADC, *adc* demantur similes arcus ABC, *abc*, arcus ADC, *adc*, qui supersunt, sibi mutuo erunt similes. Fig. 1.
Ostensum est enim, æquales esse angulos ADC, *adc*, quos ipsi arcus residui ADC, *adc* comprehendunt. Fig. 2. Tab. VI.

THEOREMA XXIII.

Chordæ arcuum similium sunt directe inter se, ut circulorum radii.

142. Duorum inæqualium circulorum, quorum radii sint rectæ MC, *mc*, spectentur duo arcus similes CXD, *cxd*. Horum autem chordæ sint rectæ CD, *cd*. Dico, chordam CD esse ad chordam *cd*, ut est radius MC ad radium *mc*. Fig. 18. Fig. 19. Tab. V.

Demonstratio.

Ductis radiis MD, *md* ad extrema ipsorum arcuum, constituta sint duo triangula CMD, *cmd*. Quoniam igitur arcus CXD, *cxd* sunt sibi mutuo similes, anguli CMD, *cmd* erunt æquales (§. 136.). Sunt autem latera circa illos proportionalia, habetur nempe MC. MD = *mc*. *md*; cum sit MC = MD, *mc* = *md* (*Lib. VII.* §. 10.). Ergo duo ipsa triangula CMD, *cmd* erunt similia (§. 69.); ac proinde æquiangula (§. 67.), nimirum æquales erunt anguli MDC . *mdc* * MCD, *mcd*. In triangulis autem similibus homologa sunt latera æqualibus angulis opposita (§. 67.), videlicet MC, *mc* * CD,

cd * *DM*, *dm*; eademque eſt ratio omnium laterum homologorum in triangulis ſimilibus (§.77.). Ergo erit CD. *cd*=MC. *mc*. Itaque chordæ arcuum ſimilium &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XXIV.

Latera homologa figurarum rectilinearum ſimilium circulis inſcriptarum, ſimilibus ipſorum arcubus ſubtenduntur.

I.

143. Circulis ABC, *abc* inſcripta ſint duo triangula ſimilia ABC, *abc*, quorum latera homologa ſint AB, *ab* * BC, *bc* * CA, *ca*. Dico, arcus AB, *ab* eſſe ſibi mutuo ſimiles, ſicuti etiam arcus BC, *bc*, necnon arcus AC, *ac*, quorum chordæ ſunt homologa ipſorum triangulorum latera.

Fig. 2. Fig. 3. Tab.VI.

Demonſtratio.

Cum enim ob hypotheſim anguli ACB, *acb* æquales ſint inter ſe (§.3.), iique inſiſtant arcubus AB, *ab*, arcus ipſi erunt ſibi mutuo ſimiles (§.135.). Eandem ob cauſam ſimiles erunt arcus BC, *bc* ob æqualitatem angulorum BAC, *bac*, ſicuti etiam arcus AC, *ac*; cum anguli quoque ABC, *abc* ſint æquales. Ergo &c.

II.

144. Inſcripta modo ſint circulis ABD, *abd* duo ſimilia pentagona ABCDE, *abcde*, quorum homologa latera ſint AB, *ab** BC, *bc** CD, *cd* * DE, *de* * EA, *ea*. Dico, hæc omnia ſimilibus ipſorum circulorum arcubus ſubtendi.

Fig. 5. Fig. 6. Tab.VI.

Demonſtratio.

Facta ipſorum pentagonorum reſolutione in triangula ſimilia ACB, *acb* * ACE, *ace* * ECD, *ecd* (§.120.), ſimiles erunt arcus AB, *ab*, necnon arcus BC, *bc* (§.143.); cum eorum chordæ ſint latera homologa triangulorum ſimilium ACB, *acb*. Eadem ratione ſimiles erunt arcus AE, *ae*, ſicuti etiam tum arcus ED, *ed*, tum arcus CD, *cd*. Ergo latera homologa &c. quod erat oſtendendum.

Co.

COROLLARIUM.

Latera omnia figurarum rectilinearum regularium ejusdem generis circulis inscriptarum, similibus eorumdem arcubus subtenduntur.

145. Omnes enim figuræ rectilineæ regulares ejusdem generis sunt sibi mutuo similes (§. 3.), & quodlibet latus unius est homologum cuilibet lateri alterius (§. 4.).

THEOREMA XXVI.

Si extra circulum sumatur punctum, atque ab illo duæ rectæ lineæ in ipsum circulum ducantur, quarum altera illius peripheriam tangat, altera secet, erit tangens media proportionalis inter totam secantem, ejusque partem, quæ inter datum punctum, ipsumque circulum continetur.

146. Extra circulum CBE sumatur punctum A, à quo duæ rectæ lineæ AC, AD in ipsum circulum cadant, ea quidem lege, ut recta AC circulum ipsum tangat, recta vero AD ipsum secet. Dico, tangentem AC esse mediam proportionalem inter totam secantem AD, ejusque segmentum AB, quod inter punctum A, & ipsum circulum reperitur. Fig. 8. Tab. VI.

Demonstratio.

Jungantur puncta C, B recta CB, & puncta C, D recta CD, duoque propterea constituta sint triangula ACB, ADC. Cum igitur angulus DAC sit communis utrique triangulo ACB, ADC, & angulus ACB trianguli ACB sit æqualis angulo CDB trianguli ADC (*Lib. VII.* §. 83.), utpote, qui in alterna circuli portione consistit, reliquus itidem angulus CBA trianguli ACB æqualis erit reliquo angulo ACD trianguli ADC (*Lib. V.* §. 46.); ac proinde duo ipsa triangula, utpote æquiangula, erunt sibi mutuo similia (§. 66.), habebuntque latera circa æquales angulos proportionalia (§. 1.), videlicet erit AD . AC = AC . AB. Igitur recta tangens AC est media proportionalis inter totam secantem AD, & ejus segmentum AB. Itaque si extra circulum &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Si ab eodem puncto extra circulum sumto in ipsum circulum duæ rectæ cadant, quarum altera circulum tangat, altera secet, quadratum tangentis erit æquale rectangulo contento sub tota secante, ejusque segmento, quod extra circulum reperitur.

147. Quadratum scilicet tangentis AC erit æquale rectangulo contento
Fig. 8. sub tota AD, ejusque segmento AB. Id enim ex eo necessario sequitur,
Tab. VI. quod tangens AC sit media proportionalis inter totam AD, ejusque segmentum AB (§. 111.).

THEOREMA XXVI.

Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secuerint, rectangulum contentum sub segmentis unius æquale erit rectangulo sub segmentis alterius comprehenso.

148. In circulo ADBC sese mutuo secent duæ rectæ lineæ AB, CD in
Fig. 9. puncto E. Dico, rectangulum contentum sub segmentis AE, EB rectæ
Tab. VI. AB æquale esse rectangulo, quod sub segmentis DE, EC rectæ CD continetur.

Demonstratio.

Jungantur puncta A, D, sicuti etiam puncta C, B rectis AD, CB, duoque fiant triangula AED, CEB. Quoniam igitur duo anguli AED, CEB sunt ad verticem oppositi, æquales erunt inter se (*Lib. III. §. 51.*). Æquales sunt autem etiam duo DAB, DCB (*Lib. VII. §. 73.*), utpote in eadem circuli portione consistentes. Ergo reliquus itidem ADE reliquo EBC æqualis erit (*Lib. V. §. 46.*). Sunt igitur duo triangula AED, CEB inter se mutuo æquiangula, ac proinde similia (§. 66.), habebuntque latera circa æquales angulos AED, CEB proportionalia (§. 1.), videlicet erit AE. ED = EC. EB. Quamobrem erit AE × EB = ED × EC (§. 107.). Si ergo in circulo &c. quod erat ostendendum.

LEMMA IV.

Circulus est polygonum regulare infinitorum laterum.

149. Res enim perspecta est, polygonum regulare ad circulum continuo accedere, quo magis, manente eodem perimetro ipsius polygoni latera multiplicantur, atque adeo exiliora fiunt, ut proinde si numero infinita ipsa fuerint, & infinitæ parvæ magnitudinis, hujusmodi polygonum a circulo discerni minime queat. Ergo circulus considerari ac sumi potest veluti polygonum regulare infinitorum laterum.

Co-

Corollarium I.

Circuli catetus non differt ab illius radio.

150. Spectato nempe circulo, veluti polygono regulari infinitorum laterum, ipsius cateti diversi non erunt ab illius radiis, nisi quantitate infinite parva, atque adeo nulla.

Corollarium II.

Omnes circuli sunt polygona regularia ejusdem generis.

151. Omnes enim eodem laterum numero continentur.

Corollarium III.

Circuli sunt polygona sibi mutuo similia.

152. Quandoquidem sunt polygona regularia ejusdem generis (§. 151.), quæ omnia sunt sibi mutuo similia (§. 3.).

Corollarium IV.

Omnes circuli sunt sibi mutuo similes.

153. Sequitur ex præcedenti.

Theorema XXVII.

Peripheriæ duorum circulorum sunt directe inter se, ut eorundem radii.

154. Sint duo circuli *enf*, ENF, quorum radii sint *mn*, MN. Dico, peripheriam *enf* esse ad peripheriam ENF, ut est radius *mn* ad radium MN. Fig. 10. Fig. 16. Tab. V.

Demonstratio.

Circuli *enf*, ENF sunt polygona regularia ejusdem generis (§. 151.), quorum perimetri sunt peripheriæ *enf*, ENF. Perimetri autem polygonorum regularium ejusdem generis sunt directe inter se, ut eorundem radii (§. 133.). Ergo peripheriæ quoque circulorum *enf*, ENF sunt directe, ut radii *mn*, MN. Itaque peripheriæ circulorum &c. quod erat ostendendum.

Co-

COROLLARIUM I.

Peripheriæ circulorum sunt, ut diametri.

155. Diametri namque circulorum sunt, ut eorundem radii (*Lib.I.* § 12.).

COROLLARIUM II.

Arcus similes duorum circulorum sunt inter se, ut eorundem radii.

156. Etenim arcus similes duorum circulorum sunt directe inter se, ut ipsorum circulorum peripheriæ (§. 7.).

COROLLARIUM III.

Circuli elementa decrescunt in ratione imminuti radii.

157. Elementa namque circuli EBD sunt peripheriæ sibi mutuo con-
Fig. 7. centricæ EBD, FGH, MNO, PRS productæ a punctis rotantis radii AB
Tab.VI. (§. 84.). Est autem peripheria FGH ad peripheriam EBD, ut est radius, sive segmentum AF radii AB ad totum ipsum radium AB (§. 154.). Similiter peripheria MNO est ad peripheriam EBD, ut est segmentum AM radii AB ad ipsum radium AB, atque ita deinceps. Ergo &c.

COROLLARIUM IV.

Circulorum diametri, & semidiametri sunt inter se, ut eorundem peripheriæ, & arcus similes.

158. Cum enim peripheriæ, & arcus similes duorum circulorum sint inter se, ut eorundem diametri, & semidiametri, erunt quoque diametri, & semidiametri duorum circulorum, ut ipsorum peripheriæ, & arcus similes.

THEOREMA XXVIII.

Perimetri duarum figurarum rectilinearum similium circulis inscriptarum sunt directe inter se, ut ipsorum circulorum radii.

159. Circulis ACD, *acd* inscripta sint duo pentagona similia ABCDE,
Fig. 5. *abcde*, quorum homologa latera sint AE, *ae*; radii vero circulorum re-
Fig. 6. ctæ FE, *fe*. Dico, perimetrum ABCDE esse ad perimetrum *abcde*, ut
Tab.VI. est radius FE ad radium *fe*.

Demon-

Demonstratio.

Cum enim latera AE, *ae* sint homologa, similes erunt arcus AE, *ae* (§. 144.); eritque propterea latus AE ad latus *ae*, ut est radius FE ad radium *fe* (§. 142.). Est autem perimeter ABCDE ad perimetrum *abcde*, ut latus AE ad latus *ae* (§. 131.). Ergo perimeter quoque ABCDE erit ad perimetrum *abcde*, ut radius FE ad radium *fe* (*Lib. I.* §. 78.). Itaque perimetri &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Perimetri duarum figurarum rectilinearum similium circulis inscriptarum sunt inter se, ut ipsorum circulorum peripheriæ.

160. Peripheriæ namque duorum circulorum sunt directe inter se, ut eorundem radii (§. 154.).

THEOREMA XXIX.

In eodem, vel æqualibus circulis sectores sunt inter se, ut arcus, quibus insistunt, estque insuper eorum quilibet ad totum circulum, ut ipsius arcus ad totam peripheriam.

I.

161. In circulo EBD duo spectentur sectores BAC, CAD. Dico, sectorem BAC esse ad sectorem CAD, ut est arcus BC ad arcum CD. Fig 7. Tab. VI.

Demonstratio.

Arcus BC, FG, MN, PR sint elementa sectoris BAC, & arcus CD, GH, NO, RS elementa sectoris CAD. Cum igitur arcus BC, FG, MN, PA sint sibi mutuo similes, quemadmodum etiam arcus CD, GH, NO, RS (§. 183.), erit tam arcus BC ad arcum FG, quam arcus CD ad arcum GH, ut radius AC ad radium AG (§. 156.); ac proinde habebitur BC ad FG, ut CD ad GH (*Lib.* I. §. 76.), & *alternando* FG ad GH, ut BC ad CD (*Ibid.* §. 125.). Eodem modo ostendam, esse tam MN ad NO, quam PR ad RS, ut est BC ad CD. Itaque aggregatum ex omnibus arcubus BC, FG, MN, PR, sive sector BAC, erit ad aggregatum ex omnibus arcubus CD, GH, NO, RS, seu ad sectorem CAD, & unus antecedentium BC ad unum consequentium CD (*Ibid.* §. 144.); adeoque &c.

II.

¶ I.

162. Dico, secundo, sectorem BAC esse ad totum circulum EBD, ut est arcus BC ad totam peripheriam EBD.

Demonstratio.

Peripheriæ concentricæ EBD, XFH, YMO, ZPS sint elementa circuli EBD, arcus vero BC, FG, MN, PR elementa sectoris BAC. Quoniam ergo arcus BC, FG, MN, PR sunt similes (§. 138.), eandem omnes rationem habebunt ad integram sui circuli peripheriam (§. 7.). Quamobrem ut arcus BC ad peripheriam EBD, ita omnes simul arcus BC, FG, MN, PR sive sector BAC, ad omnes simul peripherias EBD, XFH, YMO, ZPS, sive ad integrum circulum EBD (*Lib. I.* §. 144.). In eodem ergo, vel æqualibus circulis &c. quod erat ostendendum.

C O R O L L A R I U M I.

Sectores ejusdem, vel æqualium circulorum sunt inter se, ut ipsorum sectorum anguli, & vicissim anguli, ut sectores.

163. Sector nimirum BAC eam habet rationem ad sectorem CAD, quam habet angulus BAC ad angulum CAD, & vicissim angulus BAC est ad
Fig. 7. angulum CAD, ut sector BAC ad sectorem CAD. Anguli namque BAC,
Tab. VI. CAD sunt directe inter se, ut arcus BC, CD, quibus insistunt (*Lib. VII.* §. 27.). Sectores autem BAC, CAD sunt ut arcus BC, CD (§. 161.). Ergo erunt etiam, ut anguli BAC, CAD (*Lib. I.* §. 78.). Vicissim cum sectores BAC, CAD sint, ut arcus BC, CD, quemadmodum anguli BAC, CAD sunt, ut arcus BC, CD, quibus insistunt (*Lib. VII.* §. 27.), ita ipsi anguli erunt etiam, ut sectores BAC, CAD (*Lib. I.* §. 78.).

C O R O L L A R I U M II.

Si recta linea dividatur in partes æquales, atque ex puncto extra illam sumto ducantur ad singula puncta divisionis rectæ lineæ, quarum una sit data recta perpendicularis, rectæ illæ lineæ, quo remotiores erunt a recta perpendiculari, eo minores angulos comprehendent.

164. Divisa nimirum recta BE in partes æquales BC, CD, DE ductisque
Fig. 11. ex puncto A extra illam sumto rectis AB, AC, AD, AE, quarum AB sit
Tab. V. ipsi BE perpendicularis, angulus CAD minor erit angulo BAC, & angulus DAE minor angulo atque ita deinceps. Etenim descripto ex centro A, intervallo AC arcu FCG, & recta AB directe producta in F, angulus BAC

erit

erit ad angulum CAD, ut sector FAC ad sectorem CAG (§. 163.). Sector autem FAC major est sectore CAG; cum sector FAC sit major triangulo BAC (*Syn. Alg.* §. 257.), adeoque etiam triangulo CAD ipsi BAC æquali (§. 93.), sitque sector CAG minor triangulo CAD (*Syn. Alg* §. 257.). Ergo angulus quoque BAC major erit angulo CAD (*Lib. I.* §. 45.). Eodem modo ostendam, angulum CAD majorem esse angulo DAE. Quandoquidem descripto ex puncto A intervallo AD arcu MN, rectaque AC producta in M, sicuti evidens est, sectorem MAD majorem esse sectore DAN, ita manifestum efficitur, angulum CAD majorem esse angulo DAE. Hinc

COROLLARIUM III.

165. Si anguli BAC, CAD, DAE essent æquales inter se, segmentum BC minus esset segmento CD, & segmentum CD segmento DE.

THEOREMA XXX.

Triangula plana rectilinea similia sunt in ratione duplicata suorum laterum homologorum.

166. Sint duo triangula plana rectilinea similia ABC, *abc*, quorum bases BC, *bc* sint latera ipsorum homologa, altitudines vero rectæ AE, *ae*. Dico triangulum ABC esse ad triangulum *abc* in ratione *duplicata* lateris BC ad latus *bc*. Fig. 11. Fig. 12. Tab. VI.

Demonstratio.

Triangula ABC, *abc* sunt inter se in ratione composita ex ratione basium BC, *bc*, & altitudinum AE, *ae* (§. 106.). Ratio autem altitudinum AE, *ae* diversa non est a ratione basium BC, *bc* (§. 78.). Ergo triangula ABC, *abc* sunt in ratione composita ex ratione basium BC, *bc* ducta in seipsam. Hæc autem ratio est *duplicata* ipsarum basium, sive laterum homologorum BC, *bc* (*Lib.* I. §. 55.). Ergo triangula ABC, *abc* sunt inter se in ratione *duplicata* suorum laterum homologorum BC, *bc*. Triangula itaque plana &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Triangula plana rectilinea similia, quorum bases sint latera ipsorum homologa, sunt in ratione duplicata suarum altitudinum.

167. Sunt enim altitudines, ut duo quælibet homologa ipsorum triangulorum latera (§. 78.).

Co-

COROLLARIUM II.

Omnia triangula regularia sunt in ratione duplicata suorum laterum.

168. Omnia enim triangula regularia sunt similia (§. 3.), & quodlibet latus unius est homologum cuilibet lateri alterius (§. 4.).

COROLLARIUM III.

Altitudines triangulorum similium, quorum bases sint latera ipsorum homologa, sicuti etiam duo qualibet homologa eorundem latera, sunt in ratione ipsorum triangulorum subduplicata.

169. Sunt enim in ea ratione, ex qua ducta in seipsam ratio ipsorum triangulorum efficitur (§. 166.). Hæc autem est ratio ipsorum triangulorum *subduplicata* (*Lib. I.* § 59.). Ergo &c.

THEOREMA XXXI.

Quadrilatera similia sunt in ratione duplicata suorum laterum homologorum.

Fig. 11. 170. Sint duo quadrilatera similia ADBC, *adbc*, quorum latera homo-
Fig. 12. loga sint BC, *bc*. Dico, quadrilatera ADBC, *adbc* esse in ratione ipso-
Tab. VI. rum laterum BC, *bc duplicata*.

Demonstratio.

Ductis rectis AB, *ab*, similia sint duo triangula ABD, *abd*, sicuti etiam duo ABC, *abc* (§. 119.), rectæ vero AB, *ab* sint latera homologa tum triangulorum ABD, *abd* tum triangulorum ABC, *abc* (§. 67.), utpote opposita æqualibus eorundem angulis BDA, *bda** BCA, *bca*. Igitur tam duo triangula ABC, *abc*, quam duo ABD, *abd* erunt in *duplicata* ratione laterum AB, *ab* (§. 166.); ac proinde ratio trianguli ABC ad triangulum *abc* diversa ab ea non erit, quam habet triangulum ABD ad triangulum *abd*. Positis autem pluribus magnitudinibus proportionalibus, constat, omnes antecedentes esse ad omnes consequentes, ut est una antecedentium ad unam consequentium (*Lib.* I. §. 144.). Ergo quadrilaterum ADBC erit ad quadrilaterum *adbc*, ut triangulum ABC ad triangulum *abc*. Triangulum autem ABC est ad triangulum *abc* in ratione *duplicata* lateris BC ad latus sibi homologum *bc* (§. 166.). Ergo quadrilaterum quoque ADBC erit ad quadrilaterum *adbc* in ratione *duplicata* homologorum laterum BC, *bc*. Quadrilatera igitur similia &c. quod erat &c.

Co-

Corollarium I.

Quadrilatera similia habent duo qualibet homologa latera in ratione ipsorum subduplicata.

171. Ex ratione enim laterum homologorum ducta in seipsam oritur ratio, quam habent ipsa quadrilatera (§. 170.). Ergo latera homologa sunt in ratione ipsorum *subduplicata* (*Lib.* I §. 59).

Corollarium II.

Omnia quadrata sunt in ratione duplicata suorum laterum.

172. Omnia siquidem quadrata sunt quadrilatera similia (§. 3.), & quidem hujusmodi, ut quodlibet latus unius sit homologum cuilibet lateri alterius (§ 4).

Corollarium III.

Latera quadratorum sunt in ratione ipsorum subduplicata.

173. Sequitur ex præcedenti, ut *ex Coroll.* I. est manifestum.

Theorema XXXII.

Polygona similia sunt in ratione duplicata suorum laterum homologorum

174. Sint duo pentagona similia ABCDE, *abcde*, quorum latera homologa sint AB, *ab** BC, *bc** CD, *cd** DE, *de** EA, *ea*. Dico, pentagonum ABCDE esse ad pentagonum *abcde* in ratione *duplicata* laterum homologorum CD. *cd*. Fig. 18. Fig. 19 Tab. V.

Demonstratio.

Resolvatur utrumque pentagonum in triangula similia CMD, *cmd** DME, *dme** EMA, *ema** AMB, *amb** BMC, *bmc* (§. 120.). Cum igitur duo triangula similia sint in ratione *duplicata* suorum laterum homologorum (§. 166.), triangula CMD, *cmd*, erunt in ratione *duplicata* laterum CD, *cd*, triangula DME, *dme* in ratione *duplicata* laterum DE, *de*, triangula EMA, *ema* in ratione *duplicata* laterum EA, *ea*, triangula AMB, *amb* in ratione laterum AB, *ab*, & triangula BMC, *bmc* in ratione laterum BC, *bc duplicata*, sunt enim hæc omnia latera ipsorum homologa *respective* (§. 67.). Eadem est autem ratio omnium laterum homologorum polygonorum similium (§. 77.). Ergo erit CMD. *cmd* = DME. *dme* = EMA.

ema

ema = AMB . *amb* = BMC . *bmc*, ac proinde CMD + DME + EMA + AMB + BMC . *cmd* + *dme* + *ema* + *amb* + *bmc* = CMD . *cmd* (*Lib. I.* §. 144.), five pentagonum ABCDE ad pentagonum *abcde*, ut triangulum CMD ad triangulum *cmd*. Sunt autem hujufmodi triangula in ratione *duplicata* fuorum laterum homologorum CD, *cd* (§. 166.). Ergo in eadem quoque ratione erit pentagonum ABCDE ad pentagonum *abcde*. Itaque polygona &c. quod erat oftendendum.

Corollarium I.

Latera homologa polygonorum fimilium funt in ratione ipforum polygonorum fubduplicata.

175. Ratio namque ipforum laterum hujufmodi eft, ut ex illa in fe ducta ratio ipforum polygonorum confurgat (§. 174.).

Corollarium II.

Polygona regularia ejufdem generis funt in ratione duplicata fuorum laterum.

176. Hujufmodi namque polygona funt fibi mutuo fimilia (§. 3.), & quodlibet latus unius eft homologum cuilibet lateri alterius (§. 4.).

Corollarium III.

Polygona regularia ejufdem generis funt in ratione duplicata fuorum radiorum, & cæterorum.

Fig. 18. Fig. 19. Tab. V. 177. Pentagona fcilicet regularia ABCDE, *abcde* funt in ratione *duplicata* tum radiorum MC, *mc*, tum cæterorum MN, *mn*. Sunt enim tam radii MC, *mc*, quam cæteti MN, *mn*, ut duo ipforum pentagonorum latera CD, *cd* (§. 128. 129.).

Corollarium IV.

Polygona regularia ejufdem generis funt, ut quadrata fuorum radiorum, & cæterorum.

178. Quandoquidem hujufmodi quadrata funt inter fe, quemadmodum ipfa polygona, in ratione *duplicata* eorundem radiorum, & cæterorum (§. 172.).

Co-

COROLLARIUM V.

Latera, radii, & cateti polygonorum regularium ejusdem generis sunt respective inter se in ratione ipsorum polygonorum subduplicata.

179. Sequitur ex præcedentibus, ut patet ex §. 59. Lib. I.

COROLLARIUM VI.

Omnia plana rectilinea similia sunt in ratione duplicata suorum laterum homologorum.

180. Demonstravimus enim, omnia triangula (§. 166.), omnia quadrilatera (§. 170.), & omnia polygona similia (§. 174.) esse *respective* inter se in ratione *duplicata* suorum laterum homologorum.

COROLLARIUM VII.

Omnia plana rectilinea similia sunt inter se, ut quadrata suorum laterum homologorum.

181. Sunt enim hujusmodi quadrata in ratione *duplicata* laterum, quorum sunt quadrata (§. 172.).

COROLLARIUM VIII.

Latera homologa planorum similium sunt in ratione ipsorum subduplicata.

182. Non enim plana similia possunt esse in ratione *duplicata* laterum homologorum, quin latera sint in ratione ipsorum planorum *subduplicata* (*Lib. I.* §. 59.).

COROLLARIUM IX.

Si fuerint tres rectæ lineæ continuo proportionales, figura rectilinea descripta super primam erit ad figuram similem similiterque descriptam super secundam, ut illarum prima ad tertiam.

183. Ut si tres rectæ BC, *bc*, F fuerint continuo proportionales, triangulum ABC descriptum super primam BC erit ad triangulum *abc* simile similiterque descriptum super secundam *bc*, ut prima BC ad tertiam F. Fig. 11 Fig. 12.
Cum enim rectæ BC, *bc* sint hoc ipso latera homologa planorum ABC, Tab. VI.
abc, planum ABC erit ad planum *abc* in ratione *duplicata* laterum

rum BC, *bc* (§. 180). Est autem BC ad F in ratione *duplicata* ipsius BC ad *bc* (*Lib. I.* § 177.). Ergo &c.

COROLLARIUM X.

Figura rectilinea descripta super hypotenusam trianguli rectanguli adæquat figuras similes similiterque descriptas super ejusdem latera.

184. Si nimirum super latera AB, BC, CA trianguli rectanguli BAC similiter describantur tria similia triangula BEA, BFC, CDA triangulum BFC hypotenusæ BC æquale erit triangulis BEA, CDA laterum AB, AC.
Fig. 10. Cum enim hujusmodi triangula sint inter se, ut quadrata BH, BN, CK (§. 181.)
Tab. VI. sicuti quadratum BN est æquale quadratis BH, CK (*Lib. VI.* §. 37.), ita triangulis BEA, CDA æquale erit triangulum BFC.

THEOREMA XXIII.

Circuli sunt inter se in ratione duplicata suorum radiorum.

185. Sint duo circuli *enf*, ENF, quorum radii sint rectæ *mn*, MN. Dico, circulum *enf* esse ad circulum ENF in ratione *duplicata* radii *mn* ad radium MN.

Demonstratio.

Fig. 20. Circuli sunt polygona regularia ejusdem generis (§. 149). Hæc autem
Fig. 16. sunt in ratione *duplicata* suorum radiorum (§. 177.). Ergo in eadem quoque
Tab. V. ratione erunt circuli. Itaque circuli &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Circuli sunt in ratione duplicata suarum diametrorum.

186. Circulorum namque diametri sunt inter se, ut eorundem semidiametri (*Lib. I.* §. 127.).

COROLLARIUM II.

Semicirculi, & sectores similes sunt respective inter se in ratione duplicata diametrorum, & semidiametrorum suorum circulorum.

187. Etenim semicirculi, & sectores similes sunt inter se ut ipsi circuli (§. 11).

Co-

COROLLARIUM III.

Circuli, semicirculi, & sectores similes sunt respect.ve, ut quadrata suarum diametrorum, & semidiametrorum.

188. Videlicet circuli *enf*, ENF sunt, ut quadrata *abcd*, ABCD suarum diametrorum *ef*, EF. Sunt enim hujusmodi quadrata in ratione ipsarum diametrorum *duplicata* (§ 172.). Idipsum dicito de quadratis radiorum, quodque de circulis dictum est, de semicirculis, & sectoribus similibus itidem intelligatur. Fig. 20. Fig. 16. Tab. V.

COROLLARIUM IV.

Si fuerint tres rectæ lineæ continuo proportionales, circulus descriptus circa primam est ad circulum descriptum circa secundam, ut prima ad tertiam

189. Demonstrat eodem modo, quo idipsum ostensum est §. 183. de figuris rectilineis similibus.

SCHOLION.

190. Id quoque intelligendum est de semicirculis, & sectoribus similibus.

COROLLARIUM V.

In omni triangulo rectangulo circulus hypotenusæ est æqualis circulis laterum simul sumtis.

191. Coincidit cum demonstratione tradita §. 184. hujus. Sunt enim circuli, ut quadrata diametrorum, sive laterum trianguli rectanguli, circa quæ describuntur (§. 188.)

COROLLARIUM VI.

Circulorum diametri, & semidiametri sunt in ratione subduplicata ipsorum circulorum.

192. Ex ratione siquidem diametrorum, sicuti etiam semidiametrorum in se ducta ratio ipsorum circulorum consurgit (§. 185.). Ergo ratio diametrorum, & semidiametrorum est ratio ipsorum circulorum *subduplicata* (*Lib. I. §. 59.*)

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM

LIBER X.

De planorum dimenſione.

PLanorum ſimilium ſymptomatis demonſtratis totius *planometriæ* fundamenta hic exhibemus. *Planometria* porro dicitur ea Geometriæ pars, in qua de *planorum dimenſione* diſſeritur, moduſque traditur, quo area figuræ planæ cujuſvis generis dignoſci poteſt.

DEFINITIO I.

1. *Magnitudinem dimetiri non aliud eſt, quam invenire, quoties una magnitudo alteram noti valoris contineat.* Sic data linea dicitur eſſe *decem palmorum*, quatenus, ſi lineæ palmaris longitudinis comparetur, *decies* illam continere deprehendimus.

COROLLARIUM.

2. In omni ergo dimenſione id unum requiritur, *ut quantitas noti valoris habeatur, unitatis inſtar aſſumenda, eique comparanda, cujus quantitatem determinare volumus.*

DEFINITIO II.

3. *Menſura eſt quantitas noti valoris, quæ in dimenſione aſſumitur, quæque propterea aliquoties ſumta magnitudinem, quam per ipſam metimur, adæquat.*

COROLLARIUM I.

4. Hinc *menſura debet eſſe magnitudo ejuſdem generis cum illa; quam per ipſam dimetimur.* Quæ namque diverſi generis ſunt, non ita ſe habent, ut valor unius per alterius valorem dignoſci poſſit; cum ex una aliquoties ſumta altera haudquaquam conſurgat.

COROLLARIUM II.

5. *Quamobrem menſura linearum erit linea; menſura ſuperficierum erit ſuperficies; & menſura ſolidorum erit ſolidum.* Linea namque, ſuperficies, & corpus ſunt magnitudines diverſi generis. Quoniam vero ex menſura linearum deter-

determinatur mensura superficierum, & hinc mensura solidorum, mensuras, quæ in linearum quantitate definienda apud Geometras in usu sunt, hic subjiciam.

Mensuræ lineares.

6. Linearum mensuræ sunt *digitus*, *uncia*, sive *pollex*, *palmus*, *pes*, *hexapeda*, *decempeda*, *passus*, *stadium*, *&* *milliare*.

Digitus.

7. *Digitus* est mensura consurgens ex quatuor granis hordeaceis deinceps secundum longitudinem positis, simulque unitis, seu est longitudo quater continens longitudinem grani hordeacei.

Palmus.

8. *Palmus* est mensura consurgens ex quatuor digitis, nempe talis longitudo, ut quatuor digitorum longitudinem adæquet.

Pes, Pollex, & Linea.

9. *Pes* est mensura quatuor palmos complectens. Hic dividitur in duodecim partes æquales, quæ *unciæ*, sive *pollices* vocantur. *Uncia* quoque dividitur in duodecim partes æquales, quæ dicuntur *lineæ*. Unde *uncia*, seu *pollex* est pars duodecima *pedis*; & *linea* pars duodecima *unciæ*.

S C H O L I O N.

10. Longitudo *pedis* eadem non est apud omnes nationes, sed plane diversa. Quamobrem admissa divisione *pedis Regii Parisiensis* in duodecim *digitos*, *digiti* in duodecim *lineas*, *lineæ* in decem *particulas*, atque adeo *pedis Regii Parisiensis* in particulas 1440., quantitas *pedum*, qui apud diversas nationes in usu sunt, si ad *pedem Regium Parisiensem* referantur, ea est, quam subjectum laterculum ostendit.

Pes Regius Parisiensis	1440.	Danicus	1404.
Romanus Capitolii	1306.	Svecicus	1320.
Venetus	1540.	Ulna Bononiensis	2640.
ononiensis	1682.	Ulna Florentina	2430.
Londinensis	1350.	Palmus Romanus	990. (a).

(a) Videatur Ricciolus lib. 2. *Geographiæ*, Snellius in *Eratosthene Batavo* lib. 2. Eisenschmidius in nova Disq. de *pond.* & *mensuris* sect. 3., necnon Hist. Acad. Regiæ ad annum 1718.

Hexapeda, & Decempeda.

11. *Hexapeda* est mensura *sex pedes* complectens, eaque non videtur diversa ab *orgyia* Græcorum. *Decempeda* vero est mensura, quæ *decem pedibus* definitur.

Passus, Stadium, & Milliare.

12. *Passus Geometricus* ex quinque *pedibus* componitur; ex tribus vero, quem *Gallicum* vocant. *Stadium* continet passus 125. *Milliare* vero octo *stadia*, sive *mille passus* comprehendit.

S C H O L I O N.

13. Ceterum sicuti eadem ubique non est *pedis* magnitudo, eadem quoque apud omnes non erit *passus*, *pollicis*, *lineæ*, *stadii*, atque *milliarii* quantitas: quod valide notandum est, ut diffidentes hac in re opiniones componantur.

DEFINITIO III.

14. *Digitus, palmus, pollex, & pes quadrati sunt quadrata, quorum latus adæquat longitudinem unius digiti, palmi, pollicis, vel pedis.* Si nimirum latus quadrati fuerit digitalis longitudinis, quadratum dicitur *digitus quadratus*; si pedalis, dicitur *pes quadratus*, atque ita de ceteris.

HYPOTHESIS I.

15. Cum mensura superficiei sit superficies, area cujuslibet figuræ planæ determinatur per numerum *digitorum*, *palmorum*, *pollicum*, vel *pedum quadratorum*, quos ipsius figuræ area comprehendit.

DEFINITIO IV.

Fig. 13. Tab. VI. 16. *Area figuræ planæ dicitur nota, cum innotescit numerus digitorum, palmorum, pollicum, vel pedum quadratorum, quos area ipsa adæquat.* Sic nota erit area quadrilateri ABCD, si notum nobis fuerit, quot *pollices*, *digiti*, *palmi*, aut *pedes quadrati* in illa contineantur.

HYPOTHESIS II.

17. Ut determinetur area figuræ planæ a rectangulo diversæ, figura ipsa ad rectangulum revocanda est, nempe rectangulum constitui debet, cujus area ipsius figuræ aream adæquet. Nullius enim figuræ facilius, quam rectanguli, ut patebit, area definitur.

THEO-

THEOREMA I.

Area parallelogrammi æqualis est producto, quod fit ex ductu basis in illius altitudinem.

18. Esto parallelogrammum ABCD, cujus basis sit recta BC, altitudo vero recta DE. Dico, illius aream æqualem esse producto, quod fit ex ductu basis BC in altitudinem DE. Fig. 14. Tab. VI.

Demonstratio.

Patet ex ipsa genesi parallelogrammi. Oritur enim ex parallela elevatione basis BC, quam elevationem metitur altitudo DE (*Lib. IX.* § 41.), atque adeo ex ductu basis BC in ipsam altitudinem. Area itaque &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Area rectanguli adæquat productum, quod efficitur multiplicatione laterum, quæ sunt circa unum angulum rectum.

19. Area nimirum rectanguli ABCD adæquat factum ex ductu lateris BC in latus AB, quæ sunt circa angulum rectum ABC. Hac enim stante hypothesi, latus BC spectari potest, ut basis, & latus AB, ut altitudo ipsius rectanguli (*Lib.* V. §. 12. & 14.). Fig. 13. Tab. VI.

COROLLARIUM II.

Area cujuslibet quadrati adæquat productum, quod oritur ex ductu unius lateris in seipsum.

20. Omne enim quadratum est parallelogrammum (*Lib.* VI. §. 30.), & quidem rectangulum (*Ibidem* §. 14. & 9.), habens omnia latera inter se æqualia (*Ibidem* §. 2.).

PROBLEMA I.

Aream parallelogrammi determinare.

21. Esto parallelogrammum ABCD, cujus basis sit recta BC, & altitudo recta DE. Invenire oporteat illius aream. Fig. 14. Tab. VI.

Resolutio.

Ponatur $BC = a$, & $DE = b$. Ducantur itaque in se mutuo valores hujusmodi. Factum ab erit valor areæ quæsitus.

Demonstratio.

Patet ex §. 18.

SCHOLION.

22. Si partes, in quas divisa ponitur altitudo parallelogrammi non sint æquales partibus, in quas ponitur divisa ipsius basis, quantitas areæ ipsius parallelogrammi determinanda non est per quadrata, sed per rectangula oblonga. Ut si partes BE, EF, FG, GC basis BC parallelogrammi ABCD fuerint *pedales* longitudinis; *palmares* vero partes CH, HK, KD altitudinis DC, facta multiplicatione, area parallelogrammi ABCD *duodecim* rectangula oblonga comprehendet, quorum singulorum basis *unum pedem*, altitudo vero *unum palmum* æquabit. Hinc ut palam fiat, quot lateres ad cubiculi superficiem tegendam requiruntur, necesse est, ut in una linea secundum longitudinem, in altera vero, angulum rectum cum illa constituente, nisi quadrati fuerint, secundum latitudinem disponantur.

Fig. 13. Tab. VI.

THEOREMA II.

Area trianguli plani rectilinei est æqualis producto, quod fit multiplicando dimidiam illius basim per ejusdem altitudinem, vel integram basim per dimidiam altitudinem.

I.

Fig. 15. Tab. VI. 23. Esto triangulum planum rectilineum ABC, cujus basis sit recta BC, altitudo recta AD. Dico primo, illius aream æqualem esse producto, quod fit multiplicando medietatem Bd basis BC per totam altitudinem AD.

Demonstratio.

Super basim Bd, & sub eadem altitudine AD, nempe ed constitutum habeatur parallelogrammum $fBde$. Erit triangulum ABC æquale parallelogrammo $fBde$ (*Lib* IX. §. 97.). Area autem parallelogrammi $fBde$ est æqualis producto, quod fit ex ductu basis Bd in altitudinem ed, sive AD (§. 18.). Ergo eidem producto æqualis erit area trianguli ABC (*Syn. Alg.* §. 262.).

I I.

24. Dico secundo, aream trianguli ABC æquare productum ex ductu basis BC in medietatem Da altitudinis AD.

Demonstratio.

Constituto parallelogrammo $aDcb$, cujus basis Dc sit æqualis basi BC dati trianguli, & altitudo bc medietati aD altitudinis AD, area trianguli ABC æqualis erit areæ parallelogrammi $aDcb$ (*Lib. IX. §.* 102.). Est autem area $aDcb$ æqualis facto ex ductu basis Dc, sive BC, in altitudinem bc, seu aD (§. 18.). Ergo eidem producto area quoque trianguli ABC æqualis erit (*Syn. Alg. §.* 262.). Area igitur trianguli &c. quod erat ostendendum.

PROBLEMA II.

Aream trianguli plani rectilinei invenire.

25. Determinare oporteat aream trianguli plani rectilinei ABC.

Resolutio.

Multiplicetur valor dimidiæ basis BC per valorem altitudinis AD, vel valor dimidiæ altitudinis per valorem basis. Factum erit area trianguli ABC quæsita. Ut si medietas basis BC ponatur $= a$, & altitudo AD $= b$, valor areæ erit $= ab$. Similiter si valor totius basis sit $= d$, & valor dimidiæ altitudinis sit $= x$, valor areæ erit $= dx$. Fig. 15. Tab. VI.

Demonstratio.

Manifesta est quoad utramque partem ex §. 23. & 24.

SCHOLION.

26. Cum triangulum quodcumque sit medietas parallelogrammi ejusdem, vel æqualis basis, & altitudinis (*Lib. IX. §.* 89.), area trianguli habebitur, si factum ex ductu basis in altitudinem bifariam dividatur. Ut si basis BC trianguli ABC ponatur $= a$, & altitudo AD $= b$, area ipsius trianguli erit $= \frac{ab}{2}$.

THEO.

PROBLEMA III.

Aream trapezii invenire.

27. Invenire oporteat aream trapezii ADBC.

Resolutio.

Fig. 11. Tab. VI. Ducta diagonali AB, divisoque proinde trapezio in duo triangula ABD, ABC, inveniatur valor areæ utriusque trianguli ABD, ABC (§ 25.). Tum valores hujusmodi simul colligantur. Hæc summa erit area quæsita ipsius trapezii ADBC.

Demonstratio.

Area namque trapezii ADBC adæquat areas duorum triangulorum ABD, ABC simul sumtas (*Syn. Alg.* §. 256).

PROBLEMA IV.

Aream polygoni invenire.

28. Datum sit pentagonum ABCDE, cujus aream invenire oporteat.

Resolutio.

Fig. 16. Tab. IV. Sumto in illius area puncto *a*, ducantur ad apices singulorum angulorum ipsius pentagoni rectæ *a*A, *a*B, *a*C, *a*D, *a*E, ut proinde divisum sit ipsum pentagonum in quinque triangula rectilinea. Horum deinde singulorum triangulorum area, methodo superius tradita (§. 25.), inveniatur. Summa ex hisce valoribus consurgens erit valor areæ dati pentagoni ABCDE.

Demonstratio.

Area siquidem pentagoni ABCDE adæquat areas omnium illorum triangulorum simul sumtas (*Syn. Alg.* §. 256.).

THEOREMA III.

Area cujuslibet polygoni regularis æqualis est triangulo rectangulo, cujus alterum latus eorum, quæ sunt circa angulum rectum, sit æquale cateto ipsius polygoni, alterum ejusdem perimetro.

29. Esto hexagonum regulare ABCE, ex cujus centro *a* in latus CD cadat

cadat catetus ad. Ducta autem recta df perimetro ipsius hexagoni æquali, constituatur triangulum rectangulum adf. Dico, aream hexagoni ABE æquare aream trianguli adf. Fig. 17. Tab. VI.

Demonstratio.

Ductis namque a centro a ad apices singulorum angulorum ipsius hexagoni rectis aA, aB, aC, aD, aE, aF, divisum erit totum hexagonum in sex triangula isoscelia æqualia (*Lib* IX. §. 123.); cumque recta ad ad perpendiculum lateri CD incumbat (*Ibid.* §. 21.), si fiat segmentum de æquale lateri CD, constituaturque triangulum dae, erit triangulum dae æquale triangulo CaD (*Lib. IX.* §. 93); ac proinde singulis triangulis BaC, AaB, FaA, EaF, DaE (*Syn. Alg* §. 261.), cum singula hujusmodi triangula sint triangulo CaD æqualia. Est autem basis de æqualis singulis lateribus ipsius hexagoni, basibus nempe triangulorum æqualium, in quæ hexagonum ipsum divisum est, quatenus omnia hujusmodi latera sunt lateri CD æqualia (*Lib. V.* §. 20.). Ergo triangulum dae erit ad sex triangula, in quæ hexagonum est divisum, ut est basis de ad totum hexagoni perimetrum. Constat autem, triangulum dae esse ad triangulum daf sub eadem altitudine constitutum, ut basis de ad basim df (*Lib.* IX. §. 96.), quæ perimetro ipsius hexagoni posita est æqualis. Ergo eadem est ratio trianguli dae ad triangulum daf, & ad hexagonum ABE; atque adeo area trianguli daf aream adæquat hexagoni ACE (*Lib. I.* §. 113.); Area igitur polygoni &c. quod erat ostendendum.

Corollarium I.

Area cujuslibet polygoni regularis est æqualis rectangulo contento sub cateto, & dimidia parte perimetri ipsius polygoni.

30. Area nimirum hexagoni regularis ACE adæquat rectangulum $adbm$ contentum sub cateto ad, & dimidia parte db ipsius perimetri. Est enim rectangulum $adbm$ triangulo adf æquale (*Lib. IX.* §. 97.).

Corollarium II.

Area polygoni regularis est æqualis producto, quod fit ex ductu cateti in dimidiam partem perimetri.

31. Hujusmodi namque producto rectangulum illud æquale est, quod sub cateto, & dimidia perimetri parte continetur.

PRO-

PROBLEMA V.

Aream polygoni regularis invenire.

31. Invenire oporteat aream hexagoni regularis ACE.

Resolutio.

Fig. 17. Tab. VI. Dimidia pars perimetri ipsius hexagoni multiplicetur per ejusdem catetum *ad*. Factum erit area quaesita. Ut si dimidia pars perimetri ACE fuerit $= m$, & catetus $ad = x$, erit mx area hexagoni ACE.

Demonstratio.

Manifesta est ex §. 30.

LEMMA I.

Perimeter polygoni circuli inscripto minor est; perimeter vero polygoni circulo circumscripti est major peripheria ipsius circuli.

Fig. 18. Tab. VI. Circulo *abcde* inscriptum sit pentagonum *abcde*; circumscriptum vero pentagonum ABCDE.

I.

33. Dico primo, perimetrum *abcde* pentagoni inscripti minorem esse peripheria ipsius circuli.

Demonstratio.

Quaevis chorda, seu latus pentagoni circulo inscripti ab illo arcu circuli deficit, cui subtenditur (*Lib.V.§.6c.*). Ergo omnia latera pentagoni *abcde* simul sumta minora sunt integra peripheria circumscripti circuli *abcde*; adeoque &c.

II.

34. Dico secundo, perimetrum pentagoni ABCDE circumscripti circulo *abcde* peripheriam excedere ipsius circuli.

Demonstratio.

Ducta namque a puncto contactus *a* ad punctum contactus *e* recta *ae*, manifeste apparet, duo latera *a*A, A*e* trianguli *a*A*e* arcum excedere *ame*, quem-

quemadmodum duo ipsa latera *aA*, *Ae* majora sunt duobus *am*, *me* (*Lib.V.* §. 69.). Spectari enim potest arcus *ame* veluti crura trianguli eandem cum triangulo *aAe* basim *ae* habentis. Ergo perimeter ABCDE circumscripti pentagoni ABCDE major est integra peripheria inscripti circuli *abcde*. Etenim sicuti latera A*a*, A*e* excedunt arcum *ame*, ita duo *a*B, B*b* arcum superant *anb*, atque ita deinceps. Itaque perimeter &c. quod erat ostendendum.

LEMMA II.

Perimeter polygoni circulo inscripti eo minus deficit ab illius peripheria, & perimeter polygoni circulo circumscripti eo minus illius peripheriam superat, quo plura sunt ipsius polygoni latera.

35. Minus nimirum deficit a peripheria *abede* circumscripti circuli perimeter decagoni *anbocrduem*, quam perimeter pentagoni *abcde* eidem circulo inscripti. Idipsum dicito de polygonis circulo circumscriptis, eorum scilicet perimetrum minus excedere peripheriam inscripti circuli, quo plura sunt ipsius polygoni latera. Fig. 18. Tab. VI.

Demonstratio.

Etenim quo plura sunt latera polygoni tam inscripti, quam circumscripti circulo, eo magis polygonum ipsum ad circulum accedit. Circulus enim est polygonum infinitorum laterum (*Lib.*IX. §.149.). Ergo, quo plura sunt polygoni latera, eo minus perimeter inscripti a circuli peripheria deficit, eo minus vero perimeter circumscripti eandem superat.

THEOREMA IV.

Peripheria circuli est proxime ad diametrum, ut 3141 *ad* 1000, *sive ut* 314 *ad* 100.

36. Esto circulus *abfe*. Dico, peripheriam *abfe* eam proxime ad diametrum *af* rationem habere, quam habet 3141 ad 1000, sive ut 314 ad 100. Fig. 19. Tab. VI.

Demonstratio.

Ducatur recta *cd*, quæ sit chorda arcus *graduum* 3, *min.* 45, atque adeo latus polygoni regularis 96 laterum circulo *abfe* inscripti, eamque ad angulos rectos, ac proinde bifariam, dividat diameter *af* (*Lib.VII.* § 41.). Ductis quoque radiis A*c*, A*d*, ipsisque in directum extra circuli peripheriam productis, ducatur recta tangens BC, quæ erit latus polygoni regularis 96 laterum eidem circulo *abfe* circumscripti. Cum igitur angulus BAC sit per hypothesim *graduum* 3, *min.* 45, ipsumque bifariam dividat recta A*f*, angulus BA*f* erit *unius gradus*, & *min.* 52, *secund.* 30. Quamobrem recta

*c*F

cF erit *sinus* anguli *grad.* 1., *min.* 52., *secund.* 30.; recta vero *Bf* erit *tangens* anguli ejusdem valoris. Posita idcirco divisione diametri *af* in partes aequales 20000000, valor rectae cF ex tabulis *sinuum* erit $= 327190\frac{1}{2}$ & valor rectae B*f* erit $= 327366$, ut proinde tota *cd* sit $= 654381$, & tota BC sit $= 654732$; ut enim recta *cd* a radio A*f*, ita recta BC ab eodem radio bifariam dividitur. Est autem recta *cd* latus polygoni regularis 96 laterum circulo *abfe* inscripti, & recta BC latus polygoni itidem regularis 96 laterum eidem circulo circumscripti. Ergo multiplicato valore tam rectae *cd*, quam rectae BC per 96, factum dabit valorem integri perimetri utriusque polygoni in partibus diametri *af*, erit nempe perimeter polygoni circulo inscripti $= 62820576$, & perimeter polygoni circulo circumscripti $= 62854272$: cum sit $654381 \times 96 = 62820576$, & $654732 \times 96 = 62854272$: atque adeo perimeter polygoni regularis 96 laterum circulo *abfe* circumscripti erit ad circuli diametrum *af*, ut 62854272 ad 20000000, sive neglectis quatuor ultimis cyphris, ut 6285 ad 2000, & perimeter polygoni regularis 96 laterum eidem circulo inscripti erit ad illius diametrum, ut 62820576 ad 20000000, seu 6282 ad 2000, si quatuor itidem ultimae cyphrae negligantur. Constat autem, perimetrum polygoni circulo inscripti ab illius peripheria deficere, perimetrum vero polygoni circulo circumscripti illius peripheriam excedere (§. 33. & 34.). Ergo, spectata peripheria circuli veluti media proportionalis inter perimetrum polygoni regularis 96 laterum ipsi circulo circumscripti, & perimetrum ejusdem indolis eidem circulo inscripti, peripheria erit ad diametrum, ut 6282 ad 2000, seu ut 3141 ad 1000, sive ut 314 ad 100 proxime. Ceterum vis hujus demonstrationis evidentius patebit, cum *sinuum*, *secantium*, atque *tangentium* doctrina, alibi tradenda, percepta fuerit.

SCHOLION I.

37. Quoniam vero perimeter polygoni regularis circulo inscripti minus deficit a peripheria ipsius circuli, & perimeter polygoni itidem regularis circulo circumscripti peripheriam ipsam minus excedit, quo plura sunt, adeoque minoris magnitudinis, ipsorum polygonorum latera (§. 35.), perspicuum remanet, exactius determinari posse, quamnam ad suam diametrum circuli peripheria proportionem habeat, si loco polygoni 96 laterum, *chiliogonum*, seu polygonum 1000 laterum, vel *myriogonum*, sive polygonum 10000 laterum, aut aliud pluribus adhuc lateribus constans, assumatur. Hinc proportiones aliae peripheriae circuli ad diametrum determinatae sunt ea accuratiores, quam supra exhibui. Inter has eminent duae a Viro Cl. Ludolpho a Ceulen inventae, quarum altera cyphris 21, altera 36 definitur. Eas tamen praetereo, quod in praxi multum negotii facessant.

SCHO-

S C H O L I O N II.

38. Circuli *tetragonismum* per polygona regularia circulo inscripta, & circumscripta primus omnium tentavit Archimedes. Hac igitur usus methodo, determinavit vir summus, peripheriam circuli continere ejusdem diametrum minus quam *ter*, & *unam septimam* illius *partem*; plus vero quam *ter*, & *decem* ex illius partibus *septuagesimis primis*, videlicet posito valore diametri $= 1$, peripheriam esse ad diametrum, ut $3\frac{1}{7}$ ad 1, & hanc proportionem esse majorem vera; posito autem valore diametri $= 71$, peripheriam esse ad diametrum, ut 223 ad 71, & hanc proportionem esse veram minorem, ita nimirum ut posita divisione diametri in partes æquales 71, recta continens 223 ex hisce partibus sit minor peripheria ipsius circuli; posita vero divisione diametri in 7 partes itidem æquales, recta 22 ex hisce partibus complectens peripheriam circuli excedat. Inito siquidem calculo, invenit, perimetrum polygoni regularis 96 laterum circulo inscripti esse ad circuli diametrum, ut $3\frac{10}{71}$ ad 1, perimetrum vero polygoni ejusdem indolis circulo circumscripti esse ad diametrum, ut $3\frac{1}{7}$ ad 1, ut proinde fractio $\frac{223}{71}$ exprimat rationem peripheriæ ad diametrum minorem vera, fractio vero $\frac{22}{7}$ rationem peripheriæ ad diametrum majorem vera designet. At vero cum Archimedea proportio absque notabili errore in majoribus circulis adhiberi minime queat; quæ vero prolixis numeris traditur, multum in praxi, ut diximus, negotii facessat, ea in praxi adhiberi potest, quam supra tradidimus, videlicet quæ fractione $\frac{3141}{1000}$ exprimitur, loquendo de circulis majoribus, quæ vero fractione $\frac{314}{100}$ designatur, si res sit de circulis minoribus, nisi forte ea magis arrideat, quam a suo parente inventam, & demonstratam tradit Hadrianus Metius, quaque in terraquei orbis magnitudine definienda, ut refert Purchotius, usi sunt Mathematici Regii Parisienses, peripheriam nempe circuli esse ad illius diametrum, ut 355 ad 113.

S C H O L I O N III.

39. Cum eadem sit ratio peripheriæ cujusvis circuli ad suam diametrum perspicuum est, quod alibi aliter demonstravimus (*Lib.IX.§.*155.), peripherias duorum quorumcunque circulorum esse *directe* inter se, ut ipsorum diametri (*Lib.* I. §. 125.).

PRO-

PROBLEMA VI.

Data circuli diametro, illius peripheriam invenire.

Fig. 19. Tab. VI. 40. Esto circulus $abfe$, cujus diametri af notus sit valor. Invenire oporteat valorem peripheriæ in partibus diametri.

Resolutio.

Fractio $\frac{m}{r}$ exprimat rationem diametri ad peripheriam. Valor autem diametri af sit $= x$. Fiat ergo ut m ad r, ita x ad quartum proportionalem, scilicet $\frac{rx}{m}$ (*Lib. I. §. 87.*). Erit $\frac{rx}{m}$ valor peripheriæ $abfe$ quæsitus.

Demonstratio.

Eadem namque est ratio diametri omnium circulorum ad suam peripheriam.

PROBLEMA VII.

Data circuli peripheria, illius diametrum invenire.

Fig. 19. Tab. VI. 41. Notus sit valor peripheriæ circuli $abfe$. Invenire oporteat valorem diametri af.

Resolutio.

Ratio peripheriæ ad diametrum exprimatur fractione $\frac{r}{m}$ sitque x valor peripheriæ. Fiat ergo ut r ad m, ita x ad quartum terminum proportionalem (*Lib. I. §. 87.*), nempe $\frac{mx}{r}$. Erit $\frac{mx}{r}$ valor diametri af quæsitus.

SCHOLION.

42. Cognito valore diametri circuli, valor quoque semidiametri innotescet, si nimirum diametri valor bifariam dividatur.

THEO-

THEOREMA V.

Area circuli aequalis est triangulo rectangulo, cujus alterum latus eorum, quae sunt circa angulum rectum, adaequat radium, alterum peripheriam ipsius circuli.

43. Esto triangulum rectangulum BCD, cujus rectus angulus sit BCD. Fig. 10.
Latus autem BC sit aequale radio circuli AC, latus vero CD ejusdem peri- Tab.VI.
pheriam adaequet. Dico, aream circuli AC aequalem esse areae trianguli BCD.

Demonstratio I.

Circulus AC est polygonum regulare infinitorum laterum (*Lib. IX.* §. 149.), cujus *catetus* ab illius radio BC minime distinguitur (*Ibidem* §. 150.). Ergo circulus AC est triangulo BCD aequale (§. 29.).

Demonstratio II.

Concipiatur area circuli AC veluti consurgens ex peripheriis tot circulorum idem centrum B habentium, atque in eodem plano descriptorum, quot sunt minima puncta in radio BC; triangulum quoque BCD veluti conflatum ex tot rectis parallelis basi CD, quot sunt minima puncta in latere, sive altitudine BC (§.§. 46. 82.). Igitur tot erunt peripheriae constituentes aream circuli AC, quot sunt rectae constituentes aream trianguli BCD, nempe tot, quot in recta BC puncta reperiuntur. Elementa autem areae circularis AC aequalia sunt elementis areae triangularis BCD, alterum alteri. Quandoquidem spectetur peripheria *ba*, & recta *ad* eidem puncto *a* radii BC respondentes. Quoniam igitur recta *ad* est parallela basi CD, erit *ad* ad CD, ut est B*a* ad BC (§. 60.). Est autem etiam peripheria *ba* ad peripheriam AC, ut radius B*a* ad radium BC (§. 154.). Ergo erit recta *ad* ad rectam CD, ut peripheria *ba* ad peripheriam AC (*Lib. I.* §. 76.). Est autem per hypothesim peripheria AC aequalis rectae CD. Ergo peripheria *ba* aequalis erit rectae *ad* (§. 128.). Idipsum eodem modo de omnibus aliis eleculi AC mentis circuli AC, & trianguli ACD demonstrabitur. Ergo elementa cirsunt numero, & magnitudine aequalia elementis trianguli ACD, atque adeo area circuli AC aream adaequat trianguli ACD (§. 63.). Igitur area circuli &c. quod erat ostendendum.

SCHOLION.

44. Hinc aliter ostendi potest, quod alibi demonstravimus (§. 185.), *circulos* nempe *esse inter se in ratione duplicata suarum semidiametrorum*. Facta namque hypothesi, ut circulus AC adaequet triangulum rectangulum BCD, & circulus *ba* triangulum B*ad* simile triangulo BCD, cum triangula hu-

jusmodi sint in ratione *duplicata* suorum laterum homologorum; sive radiorum BC, Ba circulorum AC, ba (§. 166.), in ratione quoque eorundem *duplicata* erunt circuli AC, ba.

COROLLARIUM I.

Circulus aequalis est rectangulo, cujus alterum latus adaequat radium; alterum semiperipheriam ipsius circuli.

Fig. 20. Tab. VI. 45. Ut si latus Ce rectanguli BCef aequale fuerit semiperipheriae circuli AC, & latus BC ejusdem radio, circulus AC erit rectangulo BCef aequalis. Est enim rectangulum BCef aequale triangulo BCD (*Lib. IX.* §. 97.), quod circulus AC adaequat (§. 43.).

COROLLARIUM II.

Circulus est aequalis rectangulo contento sub quarta parte diametri, & tota peripheria, sicuti etiam rectangulo contento sub diametro, & quarta parte peripheriae ipsius circuli.

Fig. 20. Tab. VI. 46. Circulus nempe AC adaequat rectangulum aCDn contentum sub aC; quarta nimirum parte diametri AC, & sub recta CD, quae sit aequalis integrae peripheriae ipsius circuli. Item rectangulum ACgm, quod sub recta Cg, quarta scilicet parte peripheriae totius circuli, & sub tota ejusdem diametro AC continetur. Est enim utrumque hujusmodi rectangulum aequale rectangulo BCef (§§. 97. 102.), cui circulus ipse est aequalis (§. 43.).

COROLLARIUM III.

Area circuli aequalis est producto, quod fit ex ductu radii in semiperipheriam, vel totius peripheriae in quartam partem diametri, vel totius diametri in quartam partem peripheriae.

47. Sequitur manifeste ex praecedentibus.

COROLLARIUM IV.

Quadratum circulo circumscriptum est ad ipsum circulum, ut ipsius circuli diameter ad quartam partem peripheriae.

Fig. 21. Tab. VI. 48. Videlicet quadratum EFGH circulo ABCD circumscriptum eam habet proportionem ad ipsum circulum, quam habet ipsius circuli diameter AC ad quartam partem CD peripheriae ABCD. Super rectam enim CM, quae peripheriae ABCD quartam partem adaequet, & sub altitudine diametri AC constituatur rectangulum ACML. Erit quadratum EFGH ad rectangulum

gulum ACML, ut eſt recta FG ad rectam CM, ſive ut diameter ABCD ad quartam peripheriæ partem (Lib. IX. §. 195.). Circulus autem ABCD eſt æqualis rectangulo ACML (§. 46.). Ergo quadratum EFGH erit ad circulum ABCD, ut eſt diameter AC ad quartam peripheriæ partem CD (Lib. I. §. 112.).

COROLLARIUM V.

Quadratum circulo inſcriptum eſt ad ipſum circulum, ut diameter ejuſdem circuli ad ſemiperipheriam.

49. Quadratum nempe ABCD inſcriptum circulo ABCD eſt ad illum, ut diameter AC ad ſemiperipheriam ADC. Etenim, cum quadrilaterum EFGH ſit quadratum diagonalis AC quadrati ABCD circulo inſcripti, & quadratum ABCD ſit quadratum lateris AD ejuſdem quadrati ABCD, quadratum EFGH erit duplum quadrati ABCD (Lib VI. §. 39.). Igitur quadratum ABCD erit ad circulum ABCD, ut eſt ſemidiameter KC ad quartam partem peripheriæ ipſius circuli (§. 48.). Eſt autem ſemidiameter KC ad quartam peripheriæ partem, ut diameter ad ſemiperipheriam (Lib. I. §. 126.). Ergo quadratum ABCD erit ad circumſcriptum ſibi circulum ABCD, ut diameter AC ad ſemperipheriam ipſius circuli (Ibid. §. 76.). Fig. 21. Tab. VI.

COROLLARIUM VI.

Circulus eſt ad quadratum ſibi circumſcriptum, ut 1000 *ad* 785 *proxime. Ad quadratum vero ſibi inſcriptum, ut* 1570 *ad* 1000.

50 Sequitur ex præcedentibus, facta nempe hypotheſi, ut peripheria circuli ſit proxime ad ſuam diametrum, ut 3141 ad 1000 (§. 36.).

SCHOLION.

51 Cum vero juxta calculum Archimedis peripheria circuli ſit proxime ad ſuam diametrum, ut 22. ad 7, quadratum circulo circumſcriptum erit proxime ad ipſum circulum, ut 14 ad 11. Quadratum vero circulo inſcriptum erit ad ipſum circulum, ut 7 ad 11 proxime.

PROBLEMA VIII.

Data circuli diametro, illius aream invenire.

52 Diameter AC circuli ABCD ſit $= m$. Invenire oporteat illius aream:

Reſolutio.

Ex noto valore diametri AC determinetur valor peripheriæ ABCD §. 40 Fig. 21. Tab. IV.

Tum in quartam hujus valoris partem valor *m* diametri ducatur. Factum erit area circuli quæsita. Idipsum quoque obtinetur, si valor totius peripheriæ per quartam diametri partem multiplicetur.

Demonstratio.

Patet ex §. 47.

PROBLEMA IX.

Data circuli peripheria, illius aream invenire.

53. Valor peripheriæ ABCD dati circuli sit = *m*. Determinare oporteat illius aream.

Resolutio.

Fig. 21. Tab. VI. Ex noto peripheriæ valore eliciatur valor diametri AC (§. 41.). Tum fiat multiplicatio vel totius diametri in quartam partem peripheriæ, vel totius peripheriæ per quartam partem diametri. Quod enim hinc fit productum, erit area circuli ABCD quæsita.

Demonstratio.

Patet ex eodem §. 47.

THEOREMA VI.

Area sectoris circuli adæquat triangulum rectangulum, cujus alterum latus eorum, quæ sunt circa angulum rectum, est æquale radio, alterum arcui ipsius sectoris.

Fig. 23. Tab. VI. 54. Esto triangulum rectangulum ACD, cujus latus AC sit æquale radio; & latus CD arcui CB sectoris BAC circuli FCB. Dico, aream sectoris BAC æquare triangulum ACD.

Demonstratio.

Super rectam CE, quæ circuli BFC peripheriam adæquet, & sub eadem altitudine radii AC constituatur triangulum rectangulum ACE. Manifestum est, triangulum ACE esse ad triangulum ACD, ut est basis CE ad basim CD (*Lib. IX. §.* 96.); ac proinde per hypothesim, ut est peripheria circuli BFC ad arcum CB sectoris CAB. Est autem circulus BFC ad sectorem BAC, ut tota peripheria BFC ad arcum BC (*ibid. §.* 162.). Ergo triangulum quoque ACE erit ad triangulum ACD, ut est circulus BFC ad sectorem BAC (*Lib. I. §.* 76.); & *alternando* erit triangulum ACD ad sectorem BAC, ut trian-

triangulum ACE ad circulum BFC (*Ibid.* §. 125.). Triangulum autem ACE adæquat circulum BFC (§ 43.). Ergo triangulum quoque ACD ſectorem æquabit BAC (*Lib. I.* §. 45.). Itaque area ſectoris &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Sector circuli eſt æqualis rectangulo contento ſub recta, quæ ſit arcui ipſius ſectoris æqualis, & ſub dimidio radio, vel ſub toto radio, & dimidia parte illius rectæ.

55. Ut ſi recta CD fuerit æqualis arcui CB ſectoris BAC, erit ſector BAC æqualis rectangulo $nCDx$ contento ſub ipſa CD, & ſub dimidia parte Cn radii AC, ſicuti etiam rectangulo $ACzm$, quod ſub medietate Cz rectæ CD, & ſub toto radio AC continetur. Eſt enim tam rectangulum $nCDx$, quam rectangulum $ACzm$ æquale triangulo ACD (*Lib. IX.* §. 97. 102.), cui ſector ipſe BAC eſt æqualis (§. 54.). Fig. 21. Tab. VI.

COROLLARIUM II.

Area ſectoris circuli eſt æqualis producto, quod fit ex ductu arcus ipſius ſectoris in medietatem radii, vel ex ductu integri radii in medietatem illius arcus.

56. Sequitur ex præcedenti.

PROBLEMA XI.

Aream ſectoris circuli invenire.

57. Eſto ſector BAC circuli BFC, cujus aream invenire oporteat.

Reſolutio.

Multiplicetur valor arcus BC per valorem dimidii radii AC, vel totius radii AC per valorem dimidii arcus BC. Factum erit area ſectoris BAC quæſita. Fig. 23. Tab. VI.

Demonſtratio.

Patet ex §. 56.

PROBLEMA XI.

Aream ſegmenti circularis invenire.

58 Determinare oporteat valorem ſegmenti circularis ACD

Re-

Resolutio.

A centro B ipsius circuli ad extrema puncta A, C arcus ACD dati segmenti ducantur radii BA, BC. Tum per §. 57 inveniatur area sectoribus ABCD, cui subducatur valor areæ triangularis ACB. Quod enim hinc relinquitur, erit valor segmenti ACD quæsitus.

Fig. 22. Tab. VI.

Demonstratio.

Cognito enim valore totius, & unius partis, valor quoque alterius partis per subductionem palam efficitur.

FINIS.